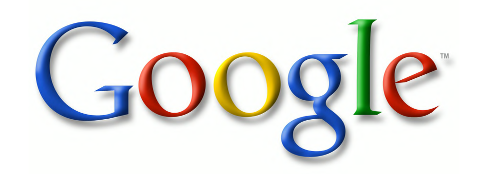
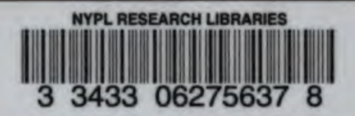



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06275637 8







MATHEMATIQUES.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1858.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie, Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

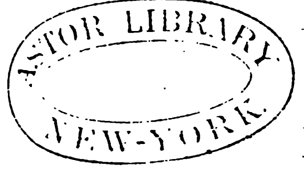
TOME DIX-SEPTIÈME

AUGMENTÉ D'UN

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.



PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.

Quai des Augustins, n° 55.

1858

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie, Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

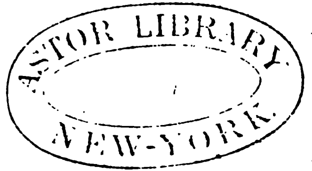
TOME DIX-SEPTIÈME

AUGMENTÉ D'UN

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.



PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.

Quai des Augustins, n° 55.

1858

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SOLUTION DE LA QUESTION 393 (CATALAN)

(voir t. XVI, p 312);

PAR MM. MARIUS LAQUIÈRE ET GEORGES FENÉON,
Élèves du lycée Saint-Louis.

Je transporte les axes parallèlement à eux-mêmes à l'extrémité A de l'ordonnée y_0. Les équations des deux courbes seront

$$y = mx + nx^2 + px^3,$$
$$y = Mx + Nx^2.$$

L'aire comprise entre l'axe des x, une ordonnée quelconque, et la courbe, sera : pour la parabole cubique

$$(1) \qquad T = x^2\left(\frac{m}{2} + \frac{nx}{3} + p\frac{x^2}{4}\right),$$

et pour la parabole du deuxième ordre

$$(2) \qquad t = x^2\left(\frac{M}{2} + \frac{Nx}{3}\right).$$

Or, les deux courbes passant par les trois points A, C, E, l'on a

$$y_1 - y_0 = \delta(m + n\delta + p\delta^2) = \delta(M + N\delta)$$

et

$$y_2 - y_1 = 2\delta(m + 2n\delta + 4p\delta^2) = 2\delta(M + 2N\delta),$$

d'où

$$M = m - 2p\delta^2, \qquad N = n + 3p\delta.$$

L'expression (2) devient alors

$$(3) \qquad x^2\left(\frac{m}{2} - p\delta^2 + \frac{n + 3p\delta}{3}x\right).$$

Faisant $x = 2\delta$, les expressions (1) et (3) des deux aires deviennent égales à

$$4\delta^2\left(\frac{m}{2} + \frac{2}{3}n\delta + p\delta^2\right).$$

Ainsi les aires des deux triangles curvilignes terminés aux paraboles du deuxième et troisième ordre et à l'axe des x et à l'ordonnée y_2 sont équivalentes.

Il en résulte évidemment que les surfaces curvilignes BCA, CDEC, sont équivalentes.

Or l'on sait que la surface d'un trapèze parabolique compris entre deux ordonnées y_0 et y_2 a pour expression

$$\frac{1}{3}\delta(y_0 + y_2 + 4y_1),$$

y_1 étant l'ordonnée également distante de y_0 et y_2.

Elle donne donc exactement aussi l'aire comprise entre les mêmes limites pour la parabole cubique.

Il en résulte, en outre, que la formule de Thomas Simpson est rigoureusement applicable à la parabole cubique dont elle décompose l'aire en trapèzes qu'elle évalue exactement.

NOTE SUR L'EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE;

PAR M. FORESTIER,

Licencié ès Sciences mathématiques, Professeur à Sainte-Barbe.

Lorque l'on veut obtenir la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans un nombre donné, quelques traités d'arithmétique font faire le cube de la racine pour vérifier le dernier chiffre de cette racine; ce procédé est très-long quand on veut obtenir un grand nombre de chiffres à la racine.

1 6 2 4 6 7 4 9 6 3 7 9 4 0 9 ....
1 2 5
3 7 4.6 7
3 2 4 6 4
5 0 0 3 4.9 6
4 4 1 4 6 2 5
5 8 8 8 7 1 3.7 9
5 3 5 2 3 3 8 1 6
5 3 6 3 7 5.6 3

545		
$3.5^2 = 75..$		154
	616	4
	8116.4	616
	16	
$3.54^2 = 8748..$		1625
	8125	5
	882925.5	8125
	25	
$3.545^2 = 891075..$		16356
	98136	6
	89205636.6	98136
	36	
$3.5456^2 = 89303808$		

D'autres traités forment les diverses parties du cube qui se trouvent dans le reste; ce moyen, quoique plus expéditif que le précédent, est encore assez pénible parce qu'il faut former trois fois le carré de la racine obtenue pour la détermination du chiffre suivant.

C'est cette partie des calculs que nous nous proposons de simplifier, et même de faire disparaître complétement sans rien changer aux autres calculs.

Soit proposé d'extraire la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans 162467496379409....

(*Voir* les calculs ci-contre.)

Après avoir obtenu le second chiffre de la racine 4 par une division, on peut vérifier ce chiffre de la manière suivante.

On forme trois fois la racine ce qui donne 15, on écrit 4 à la suite ce qui donne 154 et on multiplie par 4 le produit $616 = 3ab + b^2$ (en représentant par a le chiffre 5 déjà obtenu et par b le chiffre à vérifier).

On écrit ce produit au-dessous de 7500 et on fait la somme, ce qui donne

$$8116 = 3a^2 + 3ab + b^2.$$

En multipliant ce nombre par 4, on obtient 32464 qui contient $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, c'est-à-dire les diverses parties du cube contenues dans le reste.

On voit dans notre exemple que 4 est le chiffre de la racine.

Pour obtenir le troisième chiffre de la racine, il faut former 3.54^2. Ce produit s'obtient en écrivant 4^2 ou 16 au-dessous des nombres 616 et 8116, ce qui donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{rl} 616 = & 3ab + b^2 \\ 8116 = & 3a^2 + 3ab + b^2 \\ 16 = & b^2 \\ \hline 8748 = & 3a^2 + 6ab + 3b^2 \end{array}$$

Or trois fois le carré de 54 donne

$$3(a + b)^2 = 3a^2 + 6ab + 3b^2.$$

On voit par là que cette partie des calculs se trouve ramenée à une addition de trois nombres déjà formés.

En jetant les yeux sur le tableau, on voit comment on peut disposer les calculs.

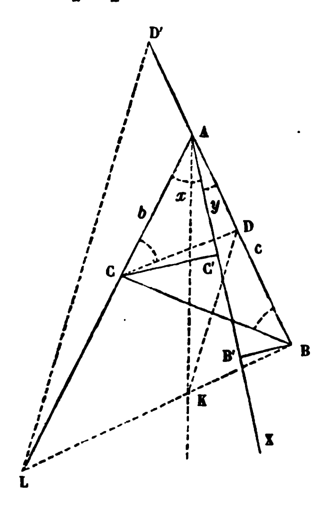
On peut même les abréger en se dispensant d'écrire deux fois les nombres que l'on a à soustraire et effectuer les soustractions en même temps que l'on fait les produits.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 396

(voir t. XVI, p. 428);

PAR M. P. CHALLIOT,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Par le sommet d'un triangle plan ABC, mener une droite telle, que les perpendiculaires BB', CC' abaissées



respectivement des sommets B et C sur cette droite, for-

ment deux triangles rectangles ABB′, ACC′ équivalents.

Soit AX la droite demandée. Posons

$$\text{CAX} = x, \quad \text{BAX} = y,$$

nous avons

$$x + y = \text{A}.$$

Cherchons leur différence.

On demande que

$$\text{AC}'.\text{CC}' = \text{AB}'.\text{BB}'.$$

Remplaçant ces lignes par leurs valeurs

$$b^2 \cos x \sin x = c^2 \cos y \sin y,$$

$$\frac{\sin 2x}{\sin 2y} = \frac{c^2}{b^2},$$

d'où

$$\frac{\sin 2x - \sin 2y}{\sin 2x - \sin 2y} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2},$$

et, d'après un théorème connu

$$\frac{\text{tang}\,(x - y)}{\text{tang A}} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2}.$$

Pour construire, écrivons cette égalité sous la forme

$$\frac{\text{tang}\,(x - y)}{\text{tang A}} = \frac{c - \frac{b^2}{c}}{c + \frac{b^2}{c}}.$$

Tirez CD de façon que l'angle ACD = ABC, les triangles semblables ACD, ACB donnent

$$\text{AD} = \frac{\overline{\text{AC}}^2}{\text{AB}} = \frac{b^2}{c}.$$

Prenez AD′ = AD, au point B faites un angle droit sur AB, joignez D′L, par le point D menez DK parallèle à

D'L, joignez AK; on aura

$$\frac{\text{tang BAK}}{\text{tang A}} = \frac{\text{BK}}{\text{BL}} = \frac{\text{BD}}{\text{BD}'} = \frac{c - \frac{b^2}{c}}{c + \frac{b^2}{c}}.$$

Donc

$$\text{BAK} = x - y.$$

Il ne reste plus qu'à mener la bissectrice AX de l'angle BAK, ce sera la droite demandée.

Remarque I. Si le triangle est isocèle, $b = c$, on a $x = y$. La bissectrice de l'angle du sommet répond évidemment à la question.

Remarque II. Si l'on demandait que les triangles, au lieu d'être équivalents, fussent dans un rapport donné $\frac{m}{n}$, on arriverait à

$$\frac{\text{ang}\,(x - y)}{\text{tang A}} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2} \cdot \frac{m}{n},$$

ce qui se construirait d'une manière analogue.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 394 (SALMON)

(voir t. XVI, p. 447);

PAR M. MARIUS LAQUIÈRE,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

La question revient à prouver que le rapport anharmonique de quatre cordes partant de l'extrémité d'un même diamètre est égal à celui des quatre cordes supplémentaires, puisqu'à tout système de diamètres conjugués correspond un système de cordes supplémentaires parallèles.

Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant :

Soient quatre points c, c_1, c_2, c_3 d'une conique, et un cinquième point quelconque m. Le rapport anharmonique des quatre droites mc, mc_1, mc_2, mc_3, est indépendant de la position du point m sur la circonférence de la conique.

Ce théorème est évident pour le cercle, je vais l'en déduire pour une conique quelconque.

Je place la conique sur un cône dont le sommet soit S : soit O un cercle tracé sur ce cône. Les génératrices Sc, Sc_1, Sc_2, Sc_3, Sm,..., déterminent sur le cercle cinq points c, c_1, c_2, c_3, M.

Quel que soit le point m, le rapport anharmonique des quatre plans mcS, mc_1S,..., est égal à celui des quatre droites mc, mc_1,..., ainsi qu'à celui des quatre droites MC, MC_1,.... Le rapport des quatre cordes concourantes de la conique est donc égal à celui des quatre cordes concourantes du cercle, et comme ce dernier est indépendant de la position du point M, le précédent est aussi indépendant de la position du point m sur la circonférence de la conique.

SOLUTION DES QUESTIONS DE L'ALGÈBRE BERTRAND

(2e édition, chapitre XVIII);

PAR M. ÉMILE MATHIEU,
Professeur.

I. Trouver la dérivée de

$$\log \operatorname{arc} \sin x, \quad \log \operatorname{arc} \cos x, \quad \log \operatorname{arc} \operatorname{tang} x.$$

Pour les deux premières quantités, on a

$$\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}\,\text{arc sin}\,x};$$

pour la troisième, on a

$$\frac{1}{(1+x^2)\,\text{arc tang}\,x}.$$

II. Trouver la dérivée de arc sin $2x\sqrt{1-x^2}$ et dire pour quelle raison cette dérivée est double de celle de arc sin x.

Écrivons d'abord cette expression arc sin $\sqrt{4x^2-4x^4}$, sa dérivée est

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}}\times\frac{2x-4x^3}{\sqrt{x^2-x^4}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette dérivée est double de celle de arc sin x, parce que arc sin $2x\sqrt{1-x^2}$ est double de arc sin x. Posons en effet

$$x=\sin y \quad \text{ou} \quad y=\text{arc sin}\,x \ (^*),$$

et nous aurons

$$\text{arc sin}\,2x\sqrt{1-x^2}=\text{arc sin}\,(2\sin y\cos y)=2y.$$

III. Trouver la dérivée de arc tang $\frac{a+x}{1-ax}$ et dire pour quelle raison cette dérivée est la même que celle de arc tang x.

La dérivée de arc tang $\frac{a+x}{1-ax}$ est

$$\frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2}\times\frac{1-ax+(a+x)a}{(1-ax)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1+x^2};$$

elle est la même que celle de arc tang x, parce que

(*) Les Anglais écrivent arc sin $x=\sin^{-1}x$. Cette notation présente des avantages dans le calcul fonctionnel. TM.

arc tang $\frac{a+x}{1-ax}$ ne diffère de arc tang x que d'une constante. Posons en effet

$$a = \text{tang}\,\alpha, \quad x = \text{tang}\,y,$$

et nous aurons

$$\text{arc tang}\,x = y \ (^*),$$

$$\text{arc tang}\frac{a+x}{1-ax} = \text{arc tang}[\text{tang}(\alpha+y)] = y+\alpha.$$

IV. Trouver la dérivée de arc tang $\frac{a+b+x-abx}{1-ab-ax-bx}$. Dire pourquoi elle est la même que la précédente. On a

$$\frac{a+b+x-abx}{1-ab-ax-bx} = \frac{\frac{a+b}{1-ab}+x}{1-\frac{a+b}{1-ab}x}.$$

L'expression dont on cherche la dérivée est donc celle de la précédente, dans laquelle on a changé a en $\frac{a+b}{1-ab}$. Donc la dérivée doit être encore $\frac{1}{1+x^2}$.

V. Trouver les bases dans lesquelles un nombre peut être égal à son logarithme, en employant l'un des procédés suivants :

1°. On étudiera la fonction $x - \log x$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir nulle.

2°. On étudiera la fonction $\frac{x}{\log x}$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à l'unité.

3°. On étudiera la fonction $a^x - x$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à zéro.

4°. On étudiera la fonction $\frac{a^x}{x}$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à l'unité.

(*) arc tang $x = \text{tang}^{-1} x$. Tm.

Étudions d'abord la fonction $y = x - \log x$. La dérivée est

$$y' = 1 - \frac{\log e}{x}.$$

Supposons d'abord la base $a > 1$. Depuis $x = 0$ jusque $x = \log e$, y' est négatif, et depuis $x = \log e$ jusque $x = \infty$, y' est positif.

Ainsi y décroît lorsque x varie de 0 à $\log e$, et croît lorsque x varie de $\log e$ à ∞, et la marche de la fonction sera indiquée par le tableau suivant :

$x = 0,$	$y = \infty,$
$x = \log e,$	$y = \log e - \log(\log e)$ minimum,
$x = \infty,$	$y = \infty.$

Pour que la fonction y puisse devenir nulle, il faut donc que l'on ait

$$\log e - \log(\log e) < 0$$

ou

$$e < \log e,$$

ce qui devient successivement

$$e < \frac{1}{la},$$

$$la < \frac{1}{e},$$

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si on suppose, en second lieu, la base $a < 1$, $\log e$ est négatif, il n'y a plus de minimum et y croît d'une manière continue depuis $-\infty$ jusque $+\infty$, donc y passe une fois par 0, donc la condition cherchée est bien

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

2°. Etudions la fonction

$$y = \frac{x}{\log x}.$$

Nous aurons

$$y' = \frac{\log x - \log e}{(\log x)^2},$$

et y' s'annule pour $x = e$.

Supposons d'abord $a > 1$.

Pour	on aura
$x = 0$,	$y = 0$,
$x = 1 - h$,	$y =$ une quantité négative très-grande,
$x = 1$,	$y = \pm \infty$,
$x = 1 + h$,	$y =$ une quantité positive très-grande,
$x = e$,	$y = \frac{e}{\log e}$ minimum,
$x = \infty$,	$y = \infty$.

Pour que la fonction $\frac{x}{\log x}$ puisse être égale à l'unité, il faudra donc que l'on ait

$$\frac{e}{\log e} < 1 \quad \text{ou} \quad a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si a est < 1, on aura

$x = 0$,	$y = 0$,
$x = 1 - h$,	$y =$ une quantité positive très-grande,
$x = 1$,	$y = \pm \infty$,
$x = 1 + h$,	$y =$ une quantité négative très-grande,
$x = e$,	$y = \frac{e}{\log e}$ maximum (quantité négative),
$x = \infty$,	$y = - \infty$.

La fonction $\frac{x}{\log x}$ passera une fois par la valeur 1, et c'est entre $x = 0$ et $x = 1$.

3°. Étudions la fonction

$$y = a^x - x.$$

Nous aurons

$$y' = a^x la - 1.$$

Supposons $a > 1$, y' sera négatif, lorsque x variera de $-\infty$ à $x = \log\left(\frac{1}{la}\right)$, et sera positif, lorsque x variera de cette valeur à $x = \infty$. Donc lorsque x varie de $-\infty$ à $\log\left(\frac{1}{la}\right)$, la fonction y est décroissante, et elle est décroissante depuis $x = \log\left(\frac{1}{la}\right)$ jusque $x = \infty$, et on a

$$x = -\infty, \qquad y = +\infty,$$

$$x = \log\left(\frac{1}{la}\right), \qquad y = \log e - \log(\log e) \text{ minimum},$$

$$x = \infty, \qquad y = \infty.$$

Pour que y s'annule, il faudra que l'on ait

$$\log e - \log(\log e) < 0,$$

ou

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si a est < 1, y' est constamment négatif, et la fonction y décroîtra constamment de $+\infty$ à $-\infty$, lorsque x variera de $-\infty$ à $+\infty$, donc y s'annulera une fois.

4°. Étudions la fonction

$$y = \frac{a^x}{x}.$$

Nousa urons

$$y' = \frac{xa^x la - a^x}{x^2}.$$

Supposons $a > 1$, on voit facilement que y est négatif lorsque x varie de $-\infty$ à $\frac{1}{la}$, et qu'il est positif lorsque x varie de $\frac{1}{la}$ à ∞.

La fonction y décroît de o à $-\infty$, lorsque x varie de $-\infty$ à o; y décroît encore de $+\infty$ à $a^{\frac{1}{la}} la$, lorsque x varie de o à $\frac{1}{la}$, et y croît de $a^{\frac{1}{a}} la$ à $+\infty$, lorsque x varie de $\frac{1}{la}$ à $+\infty$.

Si y passe par l'unité, $a^{\frac{1}{la}} la$ étant un minimum, on aura

$$a^{\frac{1}{la}} la < 1$$

ou

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si a est < 1, on voit facilement que y varie de $-\infty$ à $a^{\frac{1}{la}} la$, lorsque x varie de o à $\frac{1}{la}$; il est maximum pour $x = \frac{1}{la}$, et décroît de $a^{\frac{1}{la}} la$ à $-\infty$, lorsque x varie de $\frac{1}{la}$ à o. Enfin y décroît de ∞ à o, lorsque x varie de o à ∞. Et on voit que y passera une fois par l'unité.

VI. Examiner si l'équation

$$x^m = m^x$$

peut admettre d'autre solution que $x = m$.

On met facilement cette équation sous la forme

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log m}{m}.$$

On répondra donc à la question en étudiant la fonction $\frac{\log x}{x}$, et cherchant si cette fonction peut prendre deux fois la même valeur pour des valeurs différentes m et x de la variable.

La dérivée de $y = \frac{\log x}{x}$ est $y' = \frac{\log e - \log x}{x^2}$ (*).

Nous supposerons, par exemple, que les logarithmes soient les logarithmes vulgaires; alors y' sera positif, lorsque x variera de o à e, il sera nul pour $x = e$, et il sera négatif lorsque x variera de e à ∞.

Ainsi y décroît lorsque x varie de o à e, il est maximum pour $x = e$, et il décroît lorsque x varie de e à ∞, et nous aurons

$$x = 0, \quad y = -\infty,$$
$$x = 1, \quad y = 0,$$
$$x = e, \quad y = \frac{\log e}{e} \text{ maximum},$$
$$x = \infty, \quad y = 0.$$

Ainsi $\frac{\log x}{x}$ prend deux fois la même valeur, lorsque x varie de e à ∞, et l'équation

$$x^m = m^x$$

admettra deux solutions, lorsque m sera plus grand que 1; si m est < 1, il n'y aura que la solution $x = m$.

La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 377

(voir t. XVI, p 407);

PAR M. RICHARD P. OXAMENDI.

Soient AA_1, BB_1, CC_1, les trois perpendiculaires abais-

(*) $$\frac{\log \infty}{\infty} = 0,$$
d'où l'équation paradoxale
$$1^\infty = 0. \qquad \text{TM.}$$

sés des sommets d'un triangle ABC respectivement sur les côtés opposés ; considérons le triangle $A_1B_1C_1$; soient A_2 le point où B_1C_1 coupe AA_1 ; B_2 le point où A_1C_1 coupe BB_1 ; C_2 le point où A_1B_1 coupe CC_1 ; considérons le triangle $A_2B_2C_2$; soient A_3 l'intersection de B_2C_2 avec AA_1 ; B_3 l'intersection de A_2C_2 avec BB_1, et C_3 l'intersection de A_2B_2 avec CC_1, et ainsi de suite.

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

étant les équations des côtés BC, AC, AB du triangle, l'équation de A_nB_n sera

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - m_n \gamma \cos C = 0,$$

ou

$$m_n = \frac{m_{n-1}+2}{m_{n-1}}, \quad m_{n-1} = \frac{m_{n-2}+2}{m_{n-2}}, \ldots, \quad m_2 = \frac{m_1+2}{m_1},$$

d'où

$$m_1 = 1,$$

$$m_{2n} = \frac{2_{2n+1}+1}{2_{2n}-1} \qquad m_{2n+1} = \frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n+1}+1};$$

l'équation de $A_\infty B_\infty$ est donc

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - 2\gamma \cos C = 0;$$

de même pour les côtés B_nC_n, A_nC_n.

1°. La droite AA_1 bissecte l'angle $B_nA_nC_n$; de même les droites BB_1, CC_1.

2°. Toutes les droites A_nB_n passent par le même point; de même les droites A_nC_n, B_nC_n, et ces trois points sont une même droite (*).

(E. Harrison, Bach. Arts, Trinity college Cambridge.)

L'équation de AA_1 est

$$(1) \qquad \beta \cos B - \gamma \cos C = 0,$$

(*) Voir la figure t. XVI, p. 408.

puisque le rapport des perpendiculaires abaissées d'un point de AA_1 sur AB et AC est égal à celui des sinus des angles BAA_1 et B_1AC; or ces angles sont complémentaires de B et C. On peut remplacer le rapport de sinus par les rapports des cosinus des angles B et C.

On peut écrire de suite les équations des deux autres hauteurs,

(2) $\qquad BB_1, \quad \alpha\cos A - \gamma\cos C = 0,$

(3) $\qquad CC_1, \quad \beta\cos B - \alpha\cos A = 0.$

Leur somme est nulle, ce qui donne un théorème connu.

Formons à présent l'équation de A_1B_1; cette droite passe par les points A_1 intersection de (AA_1, BC) et B_1 intersection de (AC, BB_1), son équation sera de la forme

(4) $$r\alpha + s\beta + t\gamma = 0.$$

Soient $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ les perpendiculaires abaissées des points A_1, B_1 sur les droites $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$, on aura les deux équations entre ces coordonnées,

$$r\alpha' + s\beta' + t\gamma' = 0,$$
$$r\alpha'' + s\beta'' + t\gamma'' = 0.$$

Si l'on cherche les valeurs des rapports $\frac{r}{t}$, $\frac{s}{t}$, et qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (4), on arrive à cette équation

(5) $$\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\gamma') = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme d'un déterminant

(6) $$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \gamma' \\ \beta & \beta' & \gamma'' \\ \gamma & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons maintenant les valeurs de α', β', γ', α'', β'', γ'', pour les substituer dans cette équation et obtenir l'équation de A_1, B_1. On a

$$\text{Pour le point } A_1 \left\{ \begin{array}{l} \beta' \cos B - \gamma' \cos C = 0, \\ \alpha' = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{Pour le point } B_1 \left\{ \begin{array}{l} \gamma'' \cos C - \alpha'' \cos A = 0, \\ \beta'' = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on substitue les rapports $\frac{\beta'}{\gamma'}$ et $\frac{\alpha'}{\gamma''}$ dans l'équation (5), on aura

$$\alpha(+\beta'\gamma'') + \beta(+\alpha''\gamma') + \gamma(-\alpha''\beta') = 0,$$

mais

$$\beta' = \gamma' \frac{\cos C}{\cos B}, \quad \alpha'' = \gamma'' \frac{\cos C}{\cos A},$$

on a, en substituant,

$$\alpha\left(\gamma'\gamma''\frac{\cos C}{\cos B}\right) + \beta\left(\gamma'\gamma''\frac{\cos C}{\cos A}\right) + \left(-\gamma'\gamma''\frac{\cos C}{\cos B}\frac{\cos C}{\cos A}\right)\gamma = 0;$$

divisant par $\gamma'\gamma''\cos C$, nous aurons

$$\frac{\alpha}{\cos B} + \frac{\beta}{\cos A} - \frac{\cos C}{\cos B \cos A}\gamma = 0;$$

chassant les dénominateurs nous avons, pour l'équation de $A_1 B_1$,

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - \gamma \cos C = 0.$$

Les formules étant symétriques, nous pouvons écrire sans calcul les équations des droites $B_1 C_1$ et $A_1 C_1$; ces équations sont :

$$\alpha \cos A + \gamma \cos C - \beta \cos B = 0, \quad (A_1 C_1)$$
$$\beta \cos B + \gamma \cos C - \alpha \cos A = 0. \quad (B_1 C_1)$$

Si nous voulons trouver l'équation A_2, B_2, nous sub-

stituerons la valeur de α, β, γ, qui correspond aux points A_2 et B_2 dans l'équation (5); or l'on a

Pour le point A_2 $\begin{cases} \beta' \cos B - \gamma' \cos C = 0, & (AA_1) \\ \beta' \cos B + \gamma' \cos C - \alpha' \cos A = 0. & (B_1 C_1) \end{cases}$

Pour le point B_2 $\begin{cases} \gamma'' \cos C - \alpha'' \cos A = 0, & (BB_1) \\ \alpha'' \cos A + \gamma'' \cos C - \beta'' \cos B = 0, & (A_1 C_1) \end{cases}$

Tirant de là les valeurs des rapports $\frac{\beta'}{\gamma'}$, $\frac{\alpha'}{\gamma'}$, $\frac{\alpha''}{\gamma''}$, $\frac{\beta''}{\gamma''}$, et substituant dans (5), on trouve pour l'équation de $A_2 B_2$

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - 3\gamma \cos C = 0. \quad (A_2 B_2)$$

de même les équations $B_2 C_2$ et $A_2 C_2$,

$$\beta \cos B + \gamma \cos C - 3\alpha \cos A = 0, \quad (B_2 C_2)$$
$$\alpha \cos A + \gamma \cos C - 3\beta \cos B = 0. \quad (A_2 C_2)$$

Cherchons la loi des coefficients.

Soit $m_2 = 3$, c'est le coefficient qu'on vient de trouver; cherchons l'équation de $A_3 B_3$, nous trouverons par le même procédé, en remplaçant 3 par m_2, l'équation suivante :

$$+\alpha \cos A + \beta \cos B - \frac{m_2 + 2}{m_2} \gamma \cos C = 0,$$

de même pour les autres lignes; ainsi

$$m_1 = 1, \quad m_2 = \frac{m_1 + 2}{m_1}, \quad m_3 = \frac{m_2 + 2}{m_2}.$$

Or, l'opération se faisant toujours de la même manière, on aura

$$m_n = \frac{m_{n-1} + 2}{m_{n-1}}.$$

On aura la suite

$$m_1 = 1,$$

$$m_2 = 3,$$

$$m_3 = \frac{5}{3},$$

$$m_4 = \frac{11}{5}.$$

Si on multiplie ces fractions par $\frac{3}{3}$, on aura les fractions suivantes :

$$\frac{3}{3} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{15}{9} \cdot \frac{33}{15} \cdots$$

On peut remarquer que tous les numérateurs sont de la forme

$$2^k + 1,$$

ainsi ou pour

$$m_4 = \frac{33}{15} = \frac{32 + 1}{16 - 1} = \frac{2^5 + 1}{2^4 - 1},$$

et en général pour l'indice $2p$, on aura

$$m_{2p} = \frac{2^{2p+1} + 1}{2^{2p} - 1},$$

et pour

$$m_{2p+1} = \frac{m_{2p} + 2}{m_{2p}} = \frac{2^{2p+2} - 1}{2^{2p+1} + 1}.$$

Si on fait $p = \infty$ on aura

$$\frac{2 - \frac{1}{2^{2p+1}}}{1 + \frac{1}{2^{2p+1}}},$$

et

$$m_\infty = 2,$$

ainsi

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - \gamma \cos C = 0. \qquad (A_\infty B_\infty)$$

Cette ligne passe par le point des rencontres de trois hauteurs; car si on retranche son équation de celle de AA_1, il vient

$$\alpha \cos A - \gamma \cos C = 0, \quad \text{équation de } BB_1,$$

de même pour les droites $A_\infty C_\infty$, $B_\infty C_\infty$.

Les équations $A_n B_n$ et $A_n C_n$ sont les suivantes :

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - m_n \gamma \cos C = 0, \quad (A_n B_n)$$

$$\alpha \cos A + \gamma \cos C - m_n \beta \cos B = 0, \quad (A_n C_n)$$

et la soustraction donne

$$B \cos \beta - \gamma \cos C = 0, \quad (AA_1)$$

$$\beta \cos B + \gamma \cos C - m_{n-1} \alpha \cos A = 0, \quad (B_{n-1} C_{n-1}).$$

On voit que le rapport *anharmonique* de ces quatre droites $A_n B_n$, $A_n C_n$, $B_{n-1} C_{n-1}$, AA_1 est égal à -1; donc elles forment un faisceau *harmonique*; ainsi le faisceau $A_1 B$, $A_1 C_1$, $A_1 A$, $A_1 B_1$ est harmonique, mais l'angle $AA_1 B$ est droit, donc AA_1 est la bissectrice de l'angle $C_1 A_1 B_1$; cette propriété n'a lieu que pour ce *seul* faisceau, comme l'a très-bien remarqué M. de Jonquières (t. XVI, p. 409).

ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

Concours d'admission en 1857.

(Voir t. XVI, p. 112.)

COMPOSITIONS ÉCRITES (PARIS).

Mathématiques.

Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équa-

tion

$$x = A \sin x + B$$

pour chaque système de valeurs des coefficients A et B, et effectuer la séparation de toutes ces racines.

Application à l'équation

$$x = 3,142 \sin x + 1,57$$

(*voir* t. XVI, p. 376).

Physique.

Exposer les lois d'équilibre des gaz mélangés et du mélange des gaz et des liquides; décrire les expériences à l'aide desquelles ces lois ont été démontrées.

Exemple. Un mélange de 20 volumes d'oxygène, 79 volumes d'azote et 1 volume d'acide carbonique est superposé à 3 litres d'eau; déterminer quel volume de chaque gaz (ramené à la pression normale) sera absorbé.

Coefficients d'absorption :

Pour l'oxygène 0,05;

Pour l'azote 0,02;

Pour l'acide carbonique 1,00.

1°. Lorsque le mélange gazeux occupe un espace illimité sous la pression normale;

2°. Lorsqu'un ballon inextensible de 8 litres de capacité contient les 3 litres d'eau et les 5 litres du mélange gazeux dont la pression primitive est de 6 atmosphères.

Chimie.

Énoncer les lois qui président aux combinaisons des gaz entre eux, et les démontrer par des exemples choisis parmi les principaux métalloïdes gazeux.

Géométrie descriptive.

Deux cylindres A et B sont donnés, on prend l'inter-

section de ces deux cylindres pour diriger la génératrice d'un troisième cylindre C, et l'on veut trouver l'intersection de ce dernier cylindre par un plan P ainsi que la tangente en un point de cette intersection.

Les données devront être prises comme il suit :

Le plan P. Il est perpendiculaire à la ligne de terre, et il doit couper cette ligne vers le milieu de la largeur du papier.

Cylindre A. Il est droit et à base circulaire : le rayon est 35 millimètres, l'axe *cd c' d'* est situé dans le plan horizontal; il est parallèle à la ligne de terre et à 35 millimètres de cette ligne. On ne devra considérer que la portion de ce cylindre placée au-dessus du plan horizontal.

Cylindre B. Il est oblique et à base circulaire : la base B_1 est dans le plan horizontal, le centre de cette base est placé à gauche et à 85 millimètres du plan P, l'axe *ab*, *a'b'* est parallèle au plan vertical, à 35 millimètres de ce plan et incliné de 30 degrés vers la droite du plan horizontal. Le rayon de la base est de 25 millimètres.

Cylindre C. La génératrice G doit s'appuyer sur l'intersection des cylindres A et B; elle doit rester parallèle au plan vertical et inclinée de 65 degrés vers la droite du plan horizontal.

Pour résoudre la question, il faudra construire en vraie grandeur *k*, par rabattement sur l'un des plans de projection, l'horizontal, la courbe d'intersection du plan et du cylindre, et indiquer sur le plan rabattu la position de la tangente.

Mécanique.

Une poulie reposant par ses tourillons sur les coussinets de la chape, determiner la relation entre le puissance et la résistance, agissant dans des directions non parallèles, en tenant compte du frottement.

Cas où la puissance et la résistance sont verticales et où l'on tient compte du poids de la poulie : déterminer la perte du travail pour élever un poids de 200 kilogrammes à une hauteur de 25 mètres, en supposant le rayon de la poulie augmenté de celui de la corde égal à $0^{m},120$, celui des tourillons égal à $0^{m},010$, le poids de la poulie égal à 5 kilogrammes ; le rapport du frottement à la pression égal à 0,5.

Calcul trigonométrique.

Résoudre un triangle sphérique avec les données suivantes :

$$\text{Côté } a = 20^{\circ}.35'.22'',7,$$

$$\text{Côté } b = 60.49.35,3,$$

$$\text{Angle AC} = 22.40.15,5.$$

On déterminera l'erreur de l'angle B en supposant que les données soient en erreur d'un dixième de seconde.

Composition française.

Christophe Colomb.

Thème allemand.

Eloge de Leibnitz.

Dessin d'imitation.

ECOLE IMPÉRIALE SPÉCIALE MILITAIRE DE SAINT-CYR (1857).

COMPOSITION ÉCRITE.

Mathématiques.

Connaissant dans un triangle ABC les trois côtés, calculer les angles ainsi que la surface

$$a = 84967^{m},64,$$
$$b = 99457^{m},52,$$
$$c = 109843^{m},46.$$

Composition française.

Les défenseurs de la civilisation en Orient.

Thème allemand.

Vertus des Romains.

ÉCOLE IMPÉRIALE FORESTIÈRE.

TEXTE DES COMPOSITIONS.

Histoire naturelle.

Zoologie. — Muscles, structure et mode d'insertion.

Botanique. — Germination; circonstances nécessaires, leur mode d'action.

Géologie. — Terrain houiller; position, composition, origine.

Mathématiques.

I[re] *question* (*arithmétique*). — Exposer le système des nouvelles mesures.

II[e] *question* (*algèbre*). — Exposer la théorie des logarithmes.

III[e] *question* (*géométrie*). — Notions sur l'arpentage; de l'équerre d'arpenteur, sa vérification et son emploi. Comment calcule-t-on la surface d'un terrain limité dans une de ses parties par une ligne courbe.

Trigonométrie.

Former un résumé des formules calculables par logarithmes, servant aux différents cas de la résolution des triangles.

Cosmographie.

Des projections orthographiques et stéréographiques. Système de développement en usage dans la construction de la carte de France.

Physique.

Aiguille aimantée, déclinaison et inclinaison; boussole.

Chimie.

Oxyde de carbone, caractères; cas dans lequel il se produit.

Fermentation alcoolique.

Mécanique.

Notions sur le travail mécanique; manière de le mesurer et de le calculer dans les machines.

Dessin linéaire, lavis.

QUESTIONS.

413. Soient F et D le foyer et la directrice correspondante d'une conique; A_1, A_2 deux points fixes sur la conique et M un point *variable* aussi sur la conique; les droites MA_1, MA_2 rencontrent respectivement la directrice aux points P et Q; la distance PQ est vue du foyer F sous un angle constant, quelle que soit la position de M sur la conique. (FAURE.)

414. Quel est l'aspect du monde pour un spectateur placé sur la lune supposée sans atmosphère; par quels moyens ce spectateur peut-il reconnaître que la lune tourne autour de la terre et pas la terre autour de la lune?

415. On suppose que dans les deux triangles ABC, *abc* les angles A et *a* sont égaux; de plus, les côtés BC, *bc* opposés à ces angles sont entre eux dans le rapport des périmètres des triangles. Démontrer que ces triangles sont semblables. (Examen d'admission à l'Ecole Navale.)

416. Démontrer que le produit de six nombres entiers consécutifs ne peut pas être un carré d'un nombre commensurable.

417. A quelles conditions doivent satisfaire les côtés et les angles d'un parallélogramme pour qu'il soit possible d'inscrire un carré dans ce parallélogramme.

418. Deux figures étant en perspective, si leurs plans tournent autour de leur commune intersection, il faut pour que ces figures restent en perspective que l'œil change de position; les perpendiculaires abaissées du point de l'œil sur ces plans restent dans un rapport constant. (LAFITTE.)

419. La surface d'un triangle dont les côtés sont donnés en nombres *entiers* ne saurait être rationnelle si les côtés étant débarrassés du facteur commun 2, la somme des quotients est impaire.

(BERTON, employé au Ministère de la Marine.)

420. Dans le quadrilatère ABCD on donne : 1° les côtés AB, AD et la diagonale AC; 2° les angles BAC, CAD; on fait passer une circonférence par les trois points B, C, D; soit O le centre. Calculer : 1° la grandeur du rayon; 2° l'excentricité AO; 3° l'angle AOB.

Données :

$$\begin{aligned} AC &= 166255, \\ AB &= 163100, \\ AD &= 147750, \\ CAD &= 114^\circ\, 2'\, 12'', \\ BAB &= 27^\circ\, 5'\, 17''. \end{aligned}$$

(KEPLER, *Astronomia Nova.*)

421. Le nombre de solutions positives entières de l'équation

$$ax + by = n,$$

où a, b, n sont des nombres positif entiers, est le plus grand nombre entier compris dans $\frac{n}{ab}$ ou dans $\frac{n}{ab} + 1$.

(HERMITE.)

422. Construire et discuter la courbe donnée par l'équation

$$yx^2 + bx + c = 0.$$

423. On a mesuré les trois côtés a, b, c d'un triangle rectiligne ABC; α, β, γ sont les erreurs *absolues* respectives qu'on peut commettre sur la mesure des trois côtés a, b, c. Evaluer l'influence de ces erreurs sur les angles A, B, C.

424. Même question pour le triangle sphérique.

(CAILLET.)

425. Le grand arc d'une ellipse étant dans une position verticale, toute droite homogène pesante, passant par le foyer et s'appuyant par ses deux extrémités sur l'ellipse, est en équilibre. (HOLDITSCH.)

426. On donne dans le même plan un triangle ABC et une droite D; on prend sur cette droite des longueurs MN telles, que chacune soit vue du point A sous un angle droit; les droites AM, AN coupent BC en deux points m, n; le lieu de l'intersection des droites Mm, Nn ou Mn, Nm est une conique. (FAURE.)

SUR LES COURBES ET LES SURFACES DU SECOND ORDRE,

Extension du théorème de M. Dandelin;

PAR M. L'ABBÉ SAUZE,
(Maison ecclésiastique de Vals).

---

1. Le théorème de M. Dandelin est universellement connu. Il consiste en ce que :

1°. Si dans un cône circulaire droit on inscrit une sphère suivant un parallèle, tout plan tangent à la sphère en un point F et rencontrant suivant une droite D le plan du parallèle, déterminera dans le cône une *section conique* dont F sera le foyer et D la directrice.

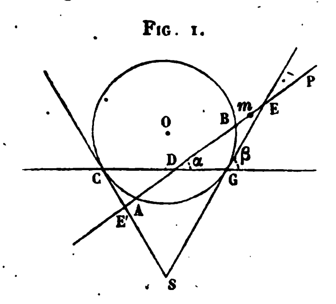
2°. Si dans un cône circulaire droit on inscrit deux sphères, tout plan tangent à ces sphères aux points F, F', déterminera dans la surface conique une section dont F, F' seront les foyers.

Nous nous proposons de démontrer que ce théorème n'est point particulier au cône, mais qu'il s'étend à plu-

sieurs des autres surfaces de révolution du second degré. Posons d'abord quelques préliminaires.

2. Soit un cône S et une sphère O inscrite suivant un parallèle CG. Les génératrices du cône forment avec le

Fig. 1.



plan de CG un angle constant β. En appelant MT la tangente menée à la sphère par un point M pris sur le cône et MN la distance de ce même point au plan CG, il est aisé de voir que l'on a

$$\frac{MT}{MN} = \frac{1}{\sin\beta}.$$

Coupons maintenant le système entier par un plan P faisant un angle α avec le plan CG, et mené de telle sorte que son intersection D avec CG passe dans l'intérieur du cône. Ce plan P déterminera dans le cône une conique EE', dans la sphère un cercle AB tangent intérieurement à la conique en deux points symétriques par rapport au grand axe, enfin dans le plan CG la droite D qui passera par les deux points de contact.

Maintenant si l'on appelle mt la tangente menée au cercle AB par un point m pris sur la section EE' et md la perpendiculaire abaissée de m sur la droite D, il est aisé de voir que l'on aura

$$\frac{mt}{md\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\beta}, \quad \frac{mt}{md} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Ce rapport $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ est, comme on peut le voir encore, le rapport $\frac{c}{a}$ de la conique.

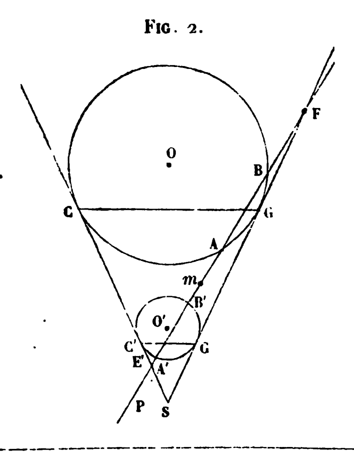
On pourra donc énoncer ce théorème :

Si dans l'intérieur d'une conique on inscrit un cercle ayant son centre sur un axe principal (*), *et si par les deux points de contact on tire une droite, la tangente menée au cercle par un point de la conique et la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite seront dans un rapport constant et égal au rapport $\frac{c}{a}$ de la conique.*

3. Soit maintenant le cône S et les deux sphères OO′ inscrites suivant les parallèles CG, C′G′. En appelant 2S la distance CC′ comprise entre les points de contact des sphères avec une des génératrices du cône, MT, MT′ les tangentes menées à ces sphères par un point M du cône, on a évidemment pour tout point pris entre les deux parallèles

$$MT + MT' = 2S.$$

Fig. 2.



(*) Focal.

Pour tout point pris en dehors du côté de l'un des cercles, de C′ G′ par exemple,

$$MT - MT' = 2S,$$

et l'on peut définir le cône S le lieu des points dont les tangentes aux deux sphères O et O′ ont leur somme ou leur différence égale à la constante 2S.

Coupons maintenant le système entier par un plan P qui détermine dans le cône la conique EE′ et dans les sphères les cercles AB, A′ B′ tangents intérieurement à la conique. En appelant *mt*, *mt′* les tangentes menées aux deux cercles par un point *m* pris sur la conique, on aura

$$mt + mt' = 2S;$$

lorsque *m* sera pris entre les deux cercles

$$mt - mt' = 2S, \quad \text{ou} \quad mt' - mt = 2S$$

dans le cas contraire. On obtiendra ainsi ce théorème :

Deux cercles étant inscrits à une conique et ayant leurs centres sur son axe principal, pour un point quelconque pris sur la courbe, la somme ou la différence 2 S *des tangentes aux deux cercles est constante.*

On remarquera encore qu'en appelant α l'angle du plan P avec l'un des plans CG, C′ G′, β celui des génératrices du cône avec les mêmes plans et $2l$ la distance entre les centres des deux cercles AB, A′ B′, on a

$$\frac{2l}{2S} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{a}.$$

4. Ces propriétés dont jouissent ainsi les cercles inscrits dans les coniques sont analogues à celles des foyers. Nous pourrions démontrer qu'elles se retrouvent encore dans un grand nombre d'autres cercles. L'ensemble de ces cercles constitue une série ou suite à laquelle les premiers appartiennent, et qui comprend même les foyers comme

cercles dont le rayon est égal à zéro. Nous avons dû négliger certains détails assez intéressants, mais qui nous auraient menés trop loin.

On remarquera que les cercles osculateurs aux sommets du grand axe dans une conique peuvent être considérés comme cercles doublement tangents à la courbe, et comme tels, jouissent des propriétés ci-dessus mentionnées.

Cette observation nous conduit à cette autre :

Une sphere étant inscrite dans un cône, si l'on coupe le système par un plan mené suivant une tangente au parallèle de contact, ce plan détermine dans la sphère un cercle qui est osculateur au sommet de la courbe déterminée dans le cône.

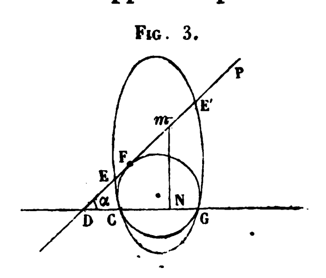
5. Ces préliminaires posés, nous allons voir comment le théorème de M. Dandelin s'étend aux surfaces du second degré et de révolution, autres que le cône ou le cylindre qui en est un cas particulier.

Ces surfaces sont au nombre de cinq, savoir : l'ellipsoïde allongé, le paraboloïde, l'hyperboloïde à deux nappes, l'hyperboloïde à une nappe et l'ellipsoïde aplati.

Les trois premières sont engendrées par le mouvement d'une conique autour de l'axe qui contient ses foyers. Les dernières proviennent de la révolution d'une ellipse ou d'une hyperbole autour de leur axe secondaire.

Considérons une des trois premières, ellipsoïde allongé, hyperboloïde à deux nappes ou paraboloïde. Supposons

Fig. 3.



qu'à cette surface on ait inscrit une sphère et qu'on ait mené un plan CG suivant le parallèle de contact. Cette surface pourra se définir le lieu des points tels, que la tangente MT menée à la sphère par un de ces points soit dans un rapport constant avec la distance MN du même point au plan du parallèle de contact,

$$\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{MN}} = \frac{c}{a},$$

c et a étant des éléments de la conique génératrice.

Cela posé, concevons un plan P tangent à la sphère en un point F coupant la surface suivant une courbe EE' et le plan CG du parallèle suivant une droite D. Soit α l'angle formé par les plans P et CG. Pour un point m pris sur la section, la ligne mF est une des tangentes à la sphère. En appelant mN la perpendiculaire abaissée de m sur le plan CG, on a

$$\frac{m\mathrm{F}}{m\mathrm{N}} = \frac{c}{a}.$$

D'ailleurs on a aussi

$$m\mathrm{N} = md \sin\alpha,$$

md étant la distance de m à l'intersection D; donc

$$\frac{m\mathrm{F}}{md} = \frac{c}{a} \sin\alpha.$$

La courbe EE' est une conique, F en est le foyer, D la directrice, et le rapport de son excentricité à son grand axe est égal à $\frac{c}{a} \sin\alpha$.

Au lieu de toucher la sphère, le plan pourrait la couper de façon que le cercle de section fût tangent en deux points à la courbe déterminée dans la surface. Dès

lors on aurait un système du genre de ceux que nous a déjà fournis le cône.

6. Soient encore l'une des surfaces mentionnées et deux sphères inscrites. La somme ou la différence $2S$ des tangentes menées aux deux sphères d'un point quelconque de la surface est constante et telle, que

$$\frac{2l}{2S} = \frac{c}{a},$$

$2l$ étant la distance entre les centres des deux sphères. Si l'on coupe cette surface par un plan tangent aux sphères en deux points F, F′, les distances mF, mF' d'un point de la section aux deux points de contact donneront encore

$$mF \pm mF' = 2S.$$

La courbe sera encore une conique, F, F′ en seront les foyers.

Hyperboloïde à une nappe.

7. L'hyperboloïde à une nappe se définit quelquefois comme la surface engendrée par le mouvement d'une droite autour d'un axe fixe. Le théorème de M. Dandelin s'y applique alors sans difficulté. Les raisonnements à faire sont absolument les mêmes que pour le cône; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

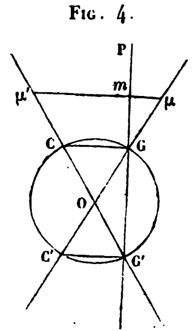
Lorsque, au contraire, on part d'abord de l'idée que cette surface est produite par la révolution d'une hyperbole, on revient au cas précédent en démontrant qu'elle admet aussi un système de génératrices rectilignes. Voici une méthode que l'on peut suivre.

Nous démontrons d'abord que, un cercle étant construit sur l'axe transverse d'une hyperbole comme diamètre, la tangente au cercle menée d'un point quel-

conque de la courbe est dans un rapport constant avec la distance du même point à l'axe transverse.

Soit le point O servant à la fois de sommet à un cône et de centre à une sphère. Soit r le rayon de cette sphère,

Fig. 4.



β l'angle des génératrices du cône avec un plan perpendiculaire à l'axe ; CG, C′G′ deux cercles parallèles suivant lesquels la sphère coupe le cône.

Menons un plan P qui coupe le cône suivant une hyperbole et la sphère suivant un cercle, de telle façon que celui-ci ait pour diamètre l'axe transverse de celle-là. (La figure représente comme les précédentes la section du système entier par un plan mené suivant l'axe du cône perpendiculairement au plan coupant P).

La distance MN d'un point M pris sur l'hyperbole à l'axe transverse de cette courbe nous est donnée par l'expression $\sqrt{mp \,.\, mp'}$.

(mp, mp' sont deux segments déterminés par m sur la parallèle pp' menée dans notre figure aux droites CG, C′G′, m est la projection de M sur le plan de la figure.) La tangente MT menée de M au cercle GG′ ou à la sphère O est égale à

$$\sqrt{(\mathrm{MO}+r)(\mathrm{MO}-r)} \quad \text{ou} \quad \sqrt{p\mathrm{C}' \,.\, p\mathrm{G}}$$

(en employant les segments pC', pG de notre figure).

Or

$$mp = pG\cos\beta, \quad mp' = pC'\cos\beta,$$

donc

$$\frac{\sqrt{pG.pC'}\cos\beta}{\sqrt{mp.mp'}} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{MT}{MN} = \frac{1}{\cos\beta}.$$

Donc, *un cercle ayant pour diamètre l'axe transverse d'une hyperbole, la tangente menée au cercle d'un point quelconque de la courbe et la distance du même point à l'axe transverse sont dans un rapport constant.*

Ce rapport est, comme on pourra le voir aisément, égal à $\frac{c}{b} > 1$.

Par suite, une sphère étant inscrite à l'hyperboloïde à une nappe suivant le cercle de gorge, la tangente à la sphère menée d'un point quelconque de la surface et la distance du même point au plan du cercle de contact sont dans un rapport constant plus grand que 1.

8. Il nous est facile maintenant de faire voir que l'hyperboloïde peut être engendré par le mouvement d'une droite.

En effet, que par un point pris sur le cercle de gorge on mène à la sphère inscrite suivant ce cercle une tangente faisant avec le plan du cercle un angle δ tel, que

$$\frac{1}{\sin\delta} = \frac{c}{b}$$

(c et b étant des éléments de l'hyperbole génératrice), en appelant MT une tangente à la sphère, MN une perpendiculaire au plan, menées toutes deux d'un point M pris sur la droite, on aura

$$\frac{MT}{MN} = \frac{1}{\sin\delta} = \frac{c}{b},$$

d'où il suit que le point M et la droite tout entière appartiennent à la surface.

Les deux énoncés qui suivent, relatifs à l'hyperbole, se déduisent facilement de ce qui vient d'être dit sur l'hyperboloïde.

1°. *Un cercle étant inscrit dans une hyperbole de façon que son centre soit situé en un point quelconque de l'axe imaginaire, la tangente au cercle menée d'un point de la courbe et la perpendiculaire à la corde de contact sont dans un rapport constant.*

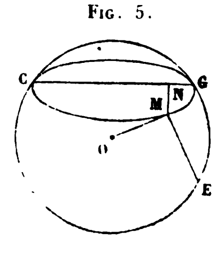
2°. *Deux cercles étant inscrits à une hyperbole et ayant leurs centres situés sur l'axe non transverse, la somme ou la différence des tangentes menées à ces cercles par un point quelconque de la courbe est égale à une constante.*

Ellipsoïde aplati.

9. L'ellipsoïde aplati diffère particulièrement des surfaces précédentes. Une sphère tangente à celle-ci suivant un parallèle la contient tout entière. Un plan tangent à la sphère ne peut donc couper la surface. Ainsi les propriétés principales contenues dans le théorème de M. Dandelin ne se trouvent point dans l'ellipsoïde aplati. Toutefois, cette surface en possède encore quelques-unes qui rappellent les précédentes.

Soit une ellipse ayant avec un cercle deux points de contact C, G symétriques l'un à l'autre par rapport au petit

Fig. 5.



axe. L'ellipse est contenue tout entière dans le cercle et la corde CG leur est commune. Par un point M pris sur l'ellipse, menons dans le cercle un diamètre MO; puis élevons dans le cercle la perpendiculaire ME au diamètre. Cette droite correspond à une tangente qu'on mènerait au cercle du point M si ce plan était extérieur. Or en appelant MN la distance de M à la corde CG, on démontrerait que l'on a

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{MN}} = \frac{m}{n} = \frac{c}{b}.$$

L'ellipse par rapport à ce cercle et l'ellipsoïde aplati par rapport à une sphère tangente jouissent donc de propriétés analogues à celles des autres surfaces.

En coupant par un plan un ellipsoïde aplati avec sa sphère tangente et le plan du parallèle de contact, on reproduit un système d'ellipse, de cercle et de droite de même nature que le système générateur.

Si le plan coupant contient une tangente au parallèle de contact, le cercle provenant de la sphère est osculateur à l'ellipse provenant de la surface.

QUESTIONS

(COMMUNIQUÉES PAR M. VANNSON).

---

427. 1°. Si, dans un triangle sphérique ABC, on joint les milieux des côtés AB, AC par un arc MN, et si du point A on mène un arc AD de 90 degrés se terminant à la rencontre de MN, cet arc sera tangent au cercle qui passe par B, C, et par le point diamétralement opposé à A.

En conclure que l'angle formé par AD et AB mesure la moitié de la surface ABC (*sans calcul*).

2°. Démontrer que la relation suivante existe entre les six dièdres d'un tétraèdre quelconque : appelant S la somme des carrés des cosinus des dièdres, S_1 la somme des produits des cosinus carrés de deux dièdres opposés, S_3 la somme des quatre produits des cosinus des dièdres formant chaque angle solide, S_4 la somme des produits des cosinus des dièdres en exceptant deux dièdres opposés, on aura

$$S + 2(S_3 + S_4) = S_1 + 1.$$

Vérifier cette équation sur un tétraèdre régulier (sans trigonométrie sphérique).

Cette question figure déjà, il est vrai, dans les *Annales* (t. V, p. 375), mais on emploie la trigonométrie sphérique, ce qui est inutile. D'ailleurs les calculs ne sont pas terminés, et la relation n'est pas exprimée (*).

3°. Étant donné un point A et deux circonférences de grand cercle qui se coupent en B, mener par A un arc qui les coupe en X et Y de manière qu'on ait

$$\frac{\text{tang BX}}{\text{tang BY}} = \frac{\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,6},$$

rapport donné (géométriquement).

4°. Construire géométriquement un triangle sphérique, connaissant un côté a et les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle opposé A.

5°. Étant donné un angle sphérique inscrit dans un petit cercle, on demande si l'arc bissecteur de cet angle coupera l'arc intercepté en deux parties égales.

6°. Si deux petits cercles se coupent en A et B, et que par un des points d'intersection, B par exemple, on inscrive une sécante commune DF de longueur donnée m,

---

(*) Il me semble que le calcul est complétement terminé et la relation exprimée. TM.

trouver par une construction graphique le cercle circonscrit au triangle ADF.

J'ai déjà énoncé cette question dans les *Annales*, mais elle n'a pas été traitée ni indiquée parmi les problèmes non résolus.

7°. Étant donné un angle formé par deux grands cercles et un point O, mener par ce point un troisième cercle qui forme avec les deux autres un triangle sphérique de surface donnée (*Géométrie*).

8°. Si deux triangles sphériques OAB, OA′B′ ont un angle au sommet commun O et même surface, si l'on joint les milieux des côtés AB, A′B′, opposés à l'angle par un arc de grand cercle, il coupera l'arc qui joint BB′ à 90 degrés du milieu de BB′.

9°. Si, dans un triangle sphérique, on donne un angle C compris entre deux côtés variables, mais dont la somme des tangentes est constante, le lieu de la rencontre des trois hauteurs dans chaque triangle est une circonférence de grand cercle; si c'est la somme des côtés qu'on donne constante, le lieu sera une ellipse sphérique.

128. On donne, sur deux droites situées dans un même plan, deux points A, B : décrire deux circonférences tangentes entre elles, qui touchent respectivement les deux droites aux points A, B, et dont les rayons soient dans le rapport donné $\frac{a}{b}$. (A résoudre par la géométrie élémentaire, sans calcul.)

Cas particulier où $\frac{a}{b} = 1$.

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

VIII.

COMPLÉMENT DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Valeurs des sinus et cosinus des arcs $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \ldots, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{10}, \ldots$

Le côté du décagone régulier inscrit dans la circonférence est égal à la plus grande partie du rayon divisé en moyenne et extrême raison. Construction géométrique. (*Extrait du* Programme officiel.)

En lisant cet énoncé, on pourrait croire qu'il s'agit de trouver, d'abord, la valeur du sinus de $\frac{\pi}{10}$, et d'en conclure, ensuite, que le côté du décagone régulier inscrit est égal à la plus grande partie du rayon divisé en moyenne et extrême raison; mais la question a été autrement entendue dans les Traités de Trigonométrie rédigés conformément au Programme, car la valeur du sinus de $\frac{\pi}{10}$ a été déduite de celle du côté du décagone régulier inscrit. Quant à la détermination de la valeur du côté du décagone, quelques auteurs se bornent à dire, en Trigonométrie : « Le côté du décagone régulier est égal, *comme on sait*, etc. » Je ferai observer qu'*on n'en sait rien*, si l'enseignement de la géométrie élémentaire a été, en tout, conforme au Programme officiel (*).

(*) Au sujet de l'inscription des polygones réguliers dans le cercle, le programme de la géométrie élémentaire est d'une grande précision; il n'y a pas deux manières de l'entendre. Voici ce qu'on y trouve : « Inscrire

D'autres auteurs, et ceux-là me semblent s'être mieux conformés à l'esprit du Programme, expliquent en trigonométrie comment on inscrit un décagone régulier dans le cercle.

Au reste, on peut trouver directement le sinus de $\frac{\pi}{10}$ au moyen du calcul suivant :

Les deux arcs $\left(3.\frac{\pi}{10}\right)$, $\left(2.\frac{\pi}{10}\right)$ étant complémentaires, on a

$$\sin\left(3.\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(2.\frac{\pi}{10}\right).$$

Mais

$$\sin\left(3.\frac{\pi}{10}\right) = 3.\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) - 4.\sin^3\left(\frac{\pi}{10}\right),$$

et,

$$\cos\left(2.\frac{\pi}{10}\right) = 1 - 2.\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

Donc

$$3.\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) - 4.\sin^3\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right),$$

d'où

$$4\sin^3\left(\frac{\pi}{10}\right) - 2.\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + 1 = 0.$$

D'après cela on voit que $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine de l'équation

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Cette équation est évidemment vérifiée par $x = 1$. En divisant le premier membre par $x - 1$, on trouve l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

dans un cercle de rayon donné un carré, un hexagone régulier. » Il n'y est nullement question du décagone régulier.

qui donne

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

La racine positive $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ est le sin de $\frac{\pi}{10}$. La racine négative $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, changée de signe, est le sinus de $\frac{3\pi}{10}$, ou le cosinus de $\frac{\pi}{5}$, comme il est facile de s'en assurer.

G.

THÉORÈMES HOMOGRAPHIQUES;

PAR M. DE LAFITTE.

I. Si deux figures sont homographiques, il existe dans chacune d'elles une infinité de cercles dont les homologues sont des cercles. — Deux cercles homologues ont leurs rayons dans un rapport constant. — Ces cercles, dans chaque figure, ont leurs centres en ligne droite. — Cette droite est perpendiculaire à la droite de la même figure dont l'homologue est à l'infini, et elle passe par les centres S et s des faisceaux superposables à leurs homologues. — Enfin si sur le segment rectiligne Ss comme diamètre on décrit un cercle, ce cercle coupe à angle droit tous les cercles de la figure dont les homologues sont des cercles.

II. On suppose qu'une figure varie de forme et de position en restant homographique à une figure fixe.

1°. Si les homologues de sept droites de la figure fixe tournent chacune autour d'un point fixe, l'homologue de toute autre droite tournera autour d'un point fixe, et

l'homologue d'un point quelconque décrira une conique. Toutes ces coniques passent par un même point, lequel est un point double commun à toutes les figures variables.

2°. Si les homologues de *sept* points déterminés de la figure fixe décrivent chacun une ligne droite, l'homologue de tout autre point décrira une ligne droite, et l'homologue d'une droite quelconque enveloppera une conique; toutes ces coniques touchent une même droite qui est une droite double commune à toutes les figures variables.

Comme cas particulier simple, on peut dire :

III. On suppose qu'une figure varie de forme et de position en demeurant semblable à elle-même.

1°. Si *trois* droites tournent chacune autour d'un point fixe, toute autre droite tourne autour d'un point fixe, et un point quelconque décrit *un cercle*. Tous ces cercles passent par un même point, qui est un point double commun à toutes les figures.

2°. Si *trois* points décrivent chacun une ligne droite, tout autre point décrit une ligne droite et une droite quelconque enveloppe une *parabole*.

Ces théorèmes donnent la solution des questions suivantes :

IV. Etant donnés deux *octogones*, *circonscrire* ou *inscrire* au premier un octogone homographique au second.

V. Etant donnés deux *quadrilatères*, *circonscrire* ou *inscrire* au premier un quadrilatère semblable au second.

Note. Ces problèmes n'ont chacun qu'*une* solution, si les points et les droites se correspondent deux à deux. Sans cela le dernier en a évidemment 24 et le précédent 40320.

THÉORÈMES SUR LES POLYGONES A DÉMONTRER;

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

I. Si l'on décompose un polygone en triangles en joignant ses sommets à un point *quelconque* de son plan et que l'on appelle S la surface d'un de ces triangles, S_1, S_2, S_3 les surfaces des trois triangles qu'on obtient en joignant les sommets du triangle S à un point *fixe*, on aura

$$\sum \frac{S^2}{S_1 . S_2 . S_3} = \text{constante}.$$

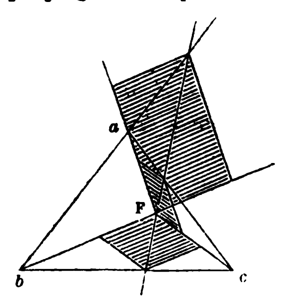
Le signe $\sum$ se rapporte à tous les triangles qui ont pour sommet le point du plan et le point fixe restant le même.

II. Si l'on décompose un polygone en triangles en joignant ses sommets à un point quelconque de son plan, et que par un point fixe on mène des parallèles aux côtés de chacun de ces triangles, on formera dans chacun d'eux trois parallélogrammes. Appelons $\frac{1}{p}$ la somme des inverses des trois parallélogrammes relatifs à l'un des triangles, on aura

$$\sum \frac{1}{p} = \text{constante}.$$

III. Un polygone est donné ainsi qu'un point fixe F dans son plan; on mène par ce point une droite arbitraire; appelons q l'aire du parallélogramme qui aurait pour sommets opposés le point fixe et le point d'intersection de la transversale avec l'un des côtés du polygone et pour

côtés les droites qui joignent le point fixe aux extrémités



du côté du polygone que l'on considère; on aura

$$\sum \frac{1}{q} = \text{constante.}$$

NOTE

Relative à quelques propriétés des figures homographiques dans l'espace;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES (*).

THÉORÈME I. *Quelle que soit la position de deux figures homographiques dans l'espace, tous les plans de l'une qui passent par une même droite rencontrent respectivement les plans homologues de l'autre figure, suivant des droites qui engendrent un hyperboloïde à une nappe.*

Car, d'après la définition de ces figures, les plans homologues forment deux faisceaux homographiques. Donc ces plans se coupent suivant les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe (*Géométrie supérieure*, n° 411).

(*) Ces propriétés se démontrent par les formules métamorphiques

$$X = \frac{p_1}{p}, \quad Y = \frac{p_2}{p}, \quad Z = \frac{p_3}{p}$$

où les p sont des fonctions linéaires en x, y, z. TM.

THÉORÈME II. *Quelle que soit la position de deux figures homographiques dans l'espace, si l'on joint un à un respectivement, par des droites, des points de la première situés en ligne droite aux points homologues de la seconde, toutes ces droites envelopperont un hyperboloïde à une nappe.*

En effet, les points de la première figure étant en ligne droite, leurs homologues sont sur une seconde droite, et, d'après la définition des figures homographiques, ces droites sont divisées homographiquement par leurs points homologues. Donc les droites qui joignent ces points un à un enveloppent un hyperboloïde à une nappe (*Géométrie supérieure*, n° 410) (*).

Remarque. Les deux théorèmes qui précèdent ont été démontrés il y a longtemps par M. Chasles dans son *Mémoire sur la dualité et l'homographie*, nos 429 et 430. Ils vont servir à la démonstration de ceux qui suivent.

THÉORÈME III. *Deux figures homographiques étant placées d'une manière quelconque dans l'espace, il existe quatre points (réels ou imaginaires) qui, étant considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde.*

En effet, prenons dans les deux figures deux triangles homologues quelconques OLP, O'L'P', et considérons deux faisceaux homographiques de plans autour des deux droites homologues OL, O'L'. Ces plans se couperont sur un hyperboloïde à une nappe H, passant par les deux droites OL, O'L' (théorème I); or cette surface passera par tout point A où coïncident deux points homologues des deux figures; car les plans OLA, O'L'A seront évidemment deux plans homologues des deux faisceaux.

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. XII, p. 358.

Considérons de même deux autres séries de faisceaux de plans homologues l'une autour des droites OP, O'P' et l'autre autour des deux droites LP, L'P'. Les plans correspondants des premiers faisceaux se couperont sur un hyperboloïde H' et ceux des seconds faisceaux sur un hyperboloïde H''; et ces deux surfaces passeront, comme H, par tout point A où coïncident deux points homologues des deux figures.

Les trois hyperboloïdes H, H', H'' ont une génératrice rectiligne commune, savoir, l'intersection des deux plans homologues OLP, O'L'P'. Donc, d'après un théorème cité par M. Chasles dans sa *Note sur les courbes gauches du troisième ordre* (*Comptes rendus*, 1857), ils se coupent en quatre points seulement, abstraction faite de cette génératrice, et je dis que chacun de ces quatre points jouit de la propriété d'être le point de coïncidence de deux points homologues des deux figures.

En effet, soit ω l'un de ces quatre points. Les plans OLω, O'L'ω des deux figures respectivement, sont homologues, puisqu'ils se coupent sur l'hyperboloïde H, et pareillement les plans OPω, O'P'ω, qui se coupent sur H'. Donc les droites Oω, O'ω, intersections de ces plans, sont deux droites homologues. On verrait de même que les droites Lω, L'ω, intersections respectives des plans LPω, LOω et L'P'ω, L'O'ω sont homologues. Donc enfin le point ω, considéré comme point de rencontre des droites Oω, Lω, est l'homologue du point ω, considéré comme point d'intersection des droites O'ω, L'ω. C. Q. F. D.

Remarque. Ces points remarquables, étant en nombre pair, peuvent être tous imaginaires, contrairement à ce qui a lieu pour les figures homographiques tracées sur un plan, où il y en a toujours un de réel au moins.

Théorème IV. *Dans deux figures homographiques à trois dimensions, il existe quatre plans (réels ou imagi-*

naires) qui, étant considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde.

En effet, prenons deux angles trièdres homologues quelconques OLPQ, O′L′P′Q′ dont O et O′ soient les sommets correspondants, et considérons d'abord les deux arêtes homologues OL, O′L′. Les droites qui joignent deux à deux leurs points correspondants sont situées sur un hyperboloïde H (théorème II) qui touche tout plan Ω suivant lequel coïncident deux plans homologues des deux figures; car ce plan rencontre les droites OL, O′L′ en deux points correspondants. Donc il contient une génératrice de l'hyperboloïde H, et, par conséquent, il touche cette surface en un point de cette génératrice.

Considérons de même deux autres séries de divisions homographiques tracées, les unes sur OP et O′P′ et les autres sur OQ, O′Q′. Les droites qui joignent les points homologues des deux premières divisions sont situées sur un hyperboloïde à une nappe H′, et celles qui joignent les points homologues des deux autres divisions sont situées sur un hyperboloïde H″.

Les trois surfaces H, H′, H″ ont une génératrice rectiligne commune, savoir, la droite de jonction des points homologues O et O′. Donc, d'après le théorème *corrélatif* de celui de M. Chasles, cité au théorème III, ces trois surfaces n'ont en commun que quatre plans tangents, abstraction faite de ceux, en nombre infini, qu'ils ont suivant la génératrice commune OO′. Je dis que chacun de ces quatre plans jouit de la propriété d'être un plan de coïncidence de deux plans homologues des deux figures.

En effet, soit Ω l'un de ces quatre plans, et soient a, a', b, b', c, c' les points où il coupe respectivement les arêtes OL, O′L′, OP, O′P′, OQ, O′Q′ des deux angles trièdres. De ce que ce plan est tangent à chacun des trois

hyperboloïdes H, H', H'', il s'ensuit que les droites *ab* et *a'b'*, *ac* et *a'c'*, *bc* et *b'c'* sont homologues deux à deux. Donc le plan Ω, considéré comme passant par les trois droites *ab*, *ac* et *bc*, est l'homologue du plan Ω, considéré comme passant par les trois autres droites; ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque. Ces plans remarquables, qu'on peut nommer *plans doubles* des figures homographiques, étant en nombre pair, peuvent être imaginaires; c'est ce qui arrive quand les quatre *points doubles* du théorème III le sont eux-mêmes, et *vice versâ;* car il est bien évident que ces plans ne sont autre chose que les quatre faces du tétraèdre dont les quatre points sont les sommets.

THÉORÈME V. *Dans deux figures homographiques à trois dimensions, il existe six droites* (*réelles ou imaginaires*) *qui, considérées comme appartenant à la première figure, sont elles-mêmes leurs homologues dans la seconde.*

Ce théorème est une conséquence des deux qui précèdent; ces *droites doubles* sont les arêtes du tétraèdre déterminé par les points doubles ou par les plans doubles indistinctement.

SOLUTION DE QUELQUES QUESTIONS
Proposées par M. Strebor
(voir t. IX, p. 182);

PAR LE P. PEPIN, S. J.

1°. Soient deux paraboles ayant même foyer et s'entre-coupant orthogonalement, qui touchent respectivement deux ellipses homofocales données, dont un des foyers coïncide avec celui des paraboles. Les points d'intersection

de toutes les paires de paraboles qui satisfont à cette condition seront situées sur une circonférence de cercle, ayant pour centre le foyer commun des paraboles.

De plus le rayon de ce cercle sera la demi-somme des grands axes des deux ellipses données.

Soient

$$\rho = \frac{\varpi}{1 + e \cos \theta}, \quad \rho = \frac{\varpi'}{1 + e' \cos \theta},$$

les équations en coordonnées polaires ρ, θ, des deux ellipses données, le pôle étant situé au foyer commun des ellipses et des paraboles.

Soient α et α' les angles que font avec l'axe polaire les axes des deux paraboles, et θ l'angle polaire, les équations de ces deux paraboles seront

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos(\theta - \alpha)}, \quad \rho = \frac{p'}{1 + \cos(\theta - \alpha')}.$$

Les points d'intersection des deux paraboles correspondent aux angles polaires qui satisfont à l'équation

$$(a) \qquad \frac{p}{1 + \cos(\theta - \alpha)} = \frac{p'}{1 + \cos(\theta - \alpha')}.$$

D'ailleurs on doit avoir

$$\alpha' = \pi + \alpha;$$

en effet, appelons μ et μ' les angles que font avec l'axe polaire les tangentes menées respectivement aux deux paraboles, par leur point d'intersection. L'angle formé par la tangente avec l'axe de la parabole est la moitié de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact avec le même axe; on a donc

$$\mu = \frac{1}{2}(\pi - \theta + \alpha), \quad \mu' = \frac{1}{2}(\pi - \theta + \alpha').$$

Or, pour que les deux tangentes soient perpendiculaires l'une à l'autre, on doit avoir

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \mu' ;$$

on a donc

$$\frac{1}{2}(\pi - \theta + \alpha') = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\pi - \theta + \alpha),$$

d'où

$$\alpha' = \pi + \alpha.$$

Dès lors l'équation (a) donnera

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{p - p'}{p + p'};$$

le rayon vecteur des points d'intersection des deux paraboles sera donc

$$(b) \qquad \rho = \frac{1}{2}(p + p');$$

pour démontrer le théorème énoncé, il suffira donc de démontrer que la somme des deux paramètres variables p, p', est égale à la somme des grands axes des deux ellipses.

La tangente trigonométrique de l'angle formé avec le rayon vecteur par la tangente à l'ellipse $\rho = \frac{\varpi}{1 + e\cos\theta}$ est

$$\rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1 + e\cos\theta}{e\sin\theta};$$

relativement à la parabole $\rho = \frac{p}{1\cos(\theta - \alpha)}$, cette tangente est

$$\rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1 + \cos(\theta - \alpha)}{\sin(\theta - \alpha} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\theta - \alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\theta - \alpha)}.$$

Puisque la parabole doit être tangente à l'ellipse, en désignant par θ' l'angle polaire correspondant au point de contact, on aura

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} & p = \frac{\varpi[1 + \cos(\theta' - \alpha)]}{1 + e\cos\theta'}, \\ & \frac{1 + e\cos\theta'}{e\sin\theta'} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\theta' - \alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\theta' - \alpha)}. \end{aligned}\right.$$

En appelant θ'' l'angle polaire qui répond au point de contact de la seconde ellipse et de la seconde parabole, on aura semblablement

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} & p' = \frac{\varpi'[1 - \cos(\theta'' - \alpha)]}{1 + e'\cos\theta''}, \\ & \frac{1 + e'\cos\theta''}{e'\sin\theta''} = -\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta'' - \alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\theta'' - \alpha)}. \end{aligned}\right.$$

Les deux équations (c) donnent

$$1 + e\cos\theta' = \frac{e\sin\theta'.\cos\frac{1}{2}(\theta' - \alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\theta' - \alpha)},$$

$$p = \frac{\varpi.2\cos^2\frac{1}{2}(\theta' - \alpha)\sin\frac{1}{2}(\theta' - \alpha)}{e\sin\theta'.\cos\frac{1}{2}(\theta' - \alpha)} = \frac{\varpi\sin(\theta' - \alpha)}{e\sin\theta'}.$$

Les équations (d) donnent de même

$$1 + e'\cos\theta'' = -\frac{e'\cos\theta''\sin\frac{1}{2}(\theta'' - \alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\theta'' - \alpha)},$$

et

$$p' = -\frac{\varpi'.\sin(\theta''-\alpha)}{e'\sin\theta''},$$

on a donc

$$(e) \qquad p+p' = \frac{\varpi.\sin(\theta'-\alpha)}{e\sin\theta'} - \frac{\varpi.\sin(\theta''-\alpha)}{e'\sin\theta''}.$$

Or la dernière des équations (c) donne

$$\begin{aligned} o &= \sin\frac{1}{2}(\theta'-\alpha) \\ &\quad - e\left[\sin\theta'.\cos\frac{1}{2}(\theta'-\alpha) - \cos\theta'\ \sin\frac{1}{2}(\theta'-\alpha)\right] \\ &= \sin\frac{1}{2}(\theta'-\alpha) - e\sin\frac{1}{2}(\theta'+\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\sin\frac{1}{2}\theta'.\cos\frac{1}{2}\alpha(1-e) - \cos\frac{1}{2}\theta'\sin\frac{1}{2}\alpha(1+e) = o,$$

d'où

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta' = \frac{1+e}{1-e}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha, \quad \text{tang}\,\theta' = \frac{(1-e^2)\sin\alpha}{(1+e^2)\cos\alpha - 2e}.$$

On aura donc

$$\frac{\sin(\theta'-\alpha)}{\sin\theta'} = \cos\alpha - \sin\alpha.\cos.\theta' = \frac{2(e-e^2\cos\alpha)}{1-e^2}.$$

De même la seconde des équations (d) donne

$$-\frac{\sin(\theta''-\alpha)}{\sin\theta''} = \frac{2(e'+e'^2\cos\alpha)}{1-e'^2};$$

en substituant dans l'équation (e) on obtiendra

$$\begin{aligned} p+p' &= \frac{2\varpi}{e}.\frac{e-e^2\cos\alpha}{1-e^2} + \frac{2\varpi'}{e'}.\frac{e'+e'^2\cos\alpha}{1-e'^2} \\ &= \frac{2\varpi}{1-e^2} + \frac{2\varpi'}{1-e'^2} + 2\cos\alpha\left(\frac{e\varpi}{1-e^2} - \frac{e'\varpi'}{1-e'^2}\right); \end{aligned}$$

or les deux ellipses étant homofocales, on a

$$\frac{e\varpi}{1-e^2}-\frac{e'\varpi'}{1-e'^2}=0.$$

On a donc

$$p+p'=\frac{2\varpi}{1-e^2}+\frac{2\varpi'}{1-e'^2};$$

or $\frac{2\varpi}{1-e^2}$ et $\frac{2\varpi'}{1-e'^2}$ sont les grands axes des deux ellipses; la somme des paramètres variables des deux paraboles est donc égale à la somme des grands axes des deux ellipses, et, en vertu de l'équation (b), le rayon vecteur de leur point d'insertion est égal à la moitié de la somme de ces grands axes. C. Q. F. D.

2°. *Trouver en coordonnées elliptiques l'équation d'une parabole quelconque, tangente à une ellipse donnée, et dont le foyer coïncide avec l'un des foyers de l'ellipse.*

Soient

$$\rho=\frac{p}{1+\cos(\theta-\alpha)} \quad \text{et} \quad \rho=\frac{\varpi}{1+e\cos\theta},$$

les équations de la parabole et de l'ellipse rapportées à leur foyer commun. On aura entre les indéterminées p, α, et les constantes ϖ et e, la relation trouvée dans le problème précédent

$$(1) \qquad p=\frac{2\varpi(1-e\cos\alpha)}{1-e^2}.$$

D'ailleurs l'équation de la parabole développée donne

$$(2) \qquad \rho+\rho.\cos\theta.\cos\alpha+\rho\sin\theta\ \sin\alpha=p.$$

Soit c la distance du centre de l'ellipse au foyer; et prenons pour coordonnées elliptiques du point (ρ, θ,) les demi-axes transverses λ, μ, de l'ellipse et de l'hyperbole, homofocales à l'ellipse donnée, qui se coupent en ce

point. Les formules de transformation seront

$$\rho \cos\theta = \frac{\lambda\mu}{c} + c, \quad \rho \sin\theta = \frac{1}{c}\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)},$$

d'où

$$\rho = \lambda + \mu.$$

L'équation (2) deviendra donc

$$(3)\ (\lambda + \mu) + \left(\frac{\lambda\mu}{c} + c\right)\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{c}\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} = p,$$

d'où

$$(4)\ \begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\lambda^2\mu^2 + \dfrac{2(\lambda\mu)}{c}(\lambda+\mu) + (\lambda+\mu)^2.\cos^2\alpha \\ \qquad + 2\lambda\mu\left(1 - \dfrac{p\cos\alpha}{c}\right) + 2(\lambda+\mu)(c\cos\alpha - p) \\ \qquad + p^2 + c^2 - 2pc\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Telle est l'équation demandée. Elle détermine pour une valeur donnée de l'angle α, quatre paraboles symétriques par rapport aux deux axes; car chaque couple de valeurs de λ et de μ détermine quatre points symétriques par rapport aux deux axes. Ces quatre paraboles satisfont aux conditions données; leurs axes principaux font avec l'axe des x positifs les angles α, $\alpha + \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \pi$, $\alpha + \frac{3\pi}{2}$.

3°. Soient

$$\Theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta . \sin^2\varphi}}, \quad \Theta' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\theta . \sin^2\varphi}};$$

il faut prouver que

$$\frac{\Theta}{\Theta'} - \frac{2}{\pi}\log(4\sin\theta . \operatorname{tang}\theta) > 0.$$

Démonstration. Θ' étant positif, l'inégalité proposée

revient à la suivante :

$$\Theta - \frac{2}{\pi}\Theta'.\log\left(\frac{4}{\cos\theta}\right) - \frac{2}{\pi}\Theta'\log(\sin^2\theta) > 0.$$

Or, en désignant par Q la série

$$Q = -\sum_1^\infty \cdot (\cos^2\theta)^n \cdot \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2\ldots 2n^2}$$
$$\times\left[1 + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{5.6} + \ldots + \frac{2}{(2n-1).2n}\right],$$

on a la relation (Verhulst, *Traité des fonctions elliptiques*, page 125)

$$\Theta - \frac{2}{\pi}\cdot\Theta'\log\left(\frac{4}{\cos\theta}\right) = Q.$$

L'égalité qu'il s'agit de démontrer devient donc

$$Q - \frac{2}{\pi}\Theta'.\log(\sin^2\theta) > 0.$$

Or

$$\Theta' = \frac{\pi}{2}\left[\begin{array}{c} 1 - \frac{1^2}{2^2}\cos^2\theta + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cos^4\theta + \ldots \\ + \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}(\cos^2\theta)^n + \ldots \end{array}\right]$$

$$-\log(1-\cos^2\theta) = \cos^2\theta + \frac{(\cos^2\theta)^2}{2} + \frac{(\cos^2\theta)^3}{3} + \ldots$$
$$+ \frac{(\cos^2\theta)^n}{n} + \ldots.$$

On a donc

$$-\frac{2}{\pi}\Theta'.\log(\sin^2\theta) = \sum_1^\infty (\cos^2\theta)^n$$
$$\times\left[\begin{array}{c} \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1^2}{2^2} + \frac{1}{n-2}\cdot\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} + \ldots \\ + \frac{1^2.3^2\ldots(2n-3)^2}{2^2.4^2\ldots(2n-2)^2} \end{array}\right]$$
$$> \sum_1^\infty \cdot \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}(\cos^2\theta)^n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right);$$

et, par conséquent,

$$Q - \frac{2}{\pi}\Theta'.\log(\sin^2\theta) > \sum_1^\infty \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}(\cos^2\theta)^n$$

$$\times\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(2n-.)2n}\right)\right].$$

Or, quel que soit le nombre entier n, la différence

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\left[1+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\ldots+(2n-1)2n\right]$$

est toujours positive; la série qui forme le second membre de l'inégalité précédente est donc positive, et l'on a

$$Q - \frac{2}{\pi}.\Theta'\log(\sin^2\theta) > 0.$$

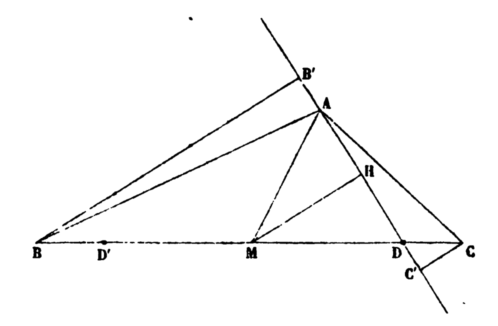
C. Q. F. D.

TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 396

(voir page 9);

PAR M. LEGRANDAIS,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Vieille).

Par le sommet A d'un triangle plan ABC mener une



droite telle, que les perpendiculaires BB′, CC′ abaissées respectivement des sommets B et C sur cette droite forment deux triangles rectangles ABB′, ACC′ équivalents.

Soit le triangle ABC dont la médiane est AM. Je décris du point M comme centre, avec un rayon égal à AM, un arc de cercle qui coupe BC en D. Je dis que la droite AD satisfait à la question.

En effet, ce qu'il faut démontrer, c'est que

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AC'}{AB'};$$

or les triangles semblables BB′D, CC′D donnent

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{B'D}{DC'},$$

Mais si je mène MH perpendiculaire à AD, le point M étant le milieu de BC, le point H est le milieu de B′C′, et l'on a

$$HB' = HC';$$

mais le triangle AMD étant isocèle, on a aussi

$$AH = HD.$$

Donc

$$AB' = DC'$$

et

$$AC' = B'D;$$

donc

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AC'}{AB'}.$$

C. Q. F. D.

Comme l'arc de cercle décrit du point M comme centre, avec MA pour rayon, coupe BC en deux points D et D′, le problème admet deux solutions.

Lorsque le triangle ABC est isocèle, ces deux solutions subsistent; seulement les triangles deviennent égaux.

Lorsque le triangle est rectangle, les deux triangles construits par la méthode précédente s'annulent, car les droites AD et AD′ se confondent avec les côtés du triangle.

On voit, du reste, facilement dans ce cas que le problème n'admet pas de solution, à moins que le triangle rectangle ne soit isocèle, et alors il en admet une infinité.

Lorsque le triangle est isocèle, sans être rectangle, outre les deux solutions qu'on trouve pour un triangle quelconque, et qui subsistent encore dans ce cas, il y a une troisième solution donnée par la droite menée parallèlement à la base.

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE;

PAR M. VANNSON.

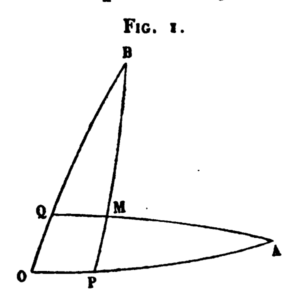
Nous nous sommes proposé, dans cet article et quelques-uns qui suivront, d'établir les formules fondamentales de l'analyse sphérique. Les personnes qui voudront étudier d'une manière plus complète cette branche d'analyse devront lire un très-bon ouvrage de M. Borgnet intitulé : *Essais d'analyse sphérique* (*). Toutefois notre marche diffère de celle de M. Borgnet en ce qu'au lieu d'employer la méthode des projections nous nous servons du calcul, en prenant pour point de départ les formules les plus usuelles de trigonométrie sphérique.

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. VI, p. 474; t. VII, p. 147 et 174. TM.

Nous insisterons sur un cas qui se présente fréquemment dans la discussion des courbes, cas dans lequel les formules générales données par M. Borgnet ne peuvent s'appliquer.

Soient deux axes obliques se coupant au point O sous un angle θ; prenons à partir du point O deux distances

FIG. 1.



OA, OB, égales à un quadrant. Pour déterminer la position d'un point quelconque M sur la sphère, il nous suffira de le joindre aux points A et B par deux arcs de grands cercles qui couperont les axes en deux points P et Q, et de nous donner les segments OP et OQ que nous appellerons les *coordonnées obliques* du point M; les points P et Q sont les projections du point M, et les points A et B se nomment *centres de projections*. Désignons les segments OP, OQ par x et y; par α l'angle que fait l'arc OM avec l'axe des x, et proposons-nous de calculer en fonction de x, y et θ les principaux lignes et angles de cette figure. La résolution du triangle AQO, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, donne

$$\tang A = \sin\theta \tang y;$$

on a de même

$$\tang B = \sin\theta \tang x,$$

d'où

(1) $$\frac{\tang A}{\tang B} = \frac{\tang y}{\tang x}.$$

Si dans le triangle OMA on prend la valeur de tang OM, on trouve

$$\tang OM = \frac{\tang A}{\sin \alpha};$$

on a par analogie

$$\tang OM = \frac{\tang B}{\sin(\theta - \alpha)},$$

d'où

$$\frac{\tang A}{\tang B} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)},$$

et, par suite,

(2) $$\frac{\tang y}{\tang x} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

Si dans cette formule α est constant, y et x variables, elle donne l'équation d'un grand cercle passant par l'origine et faisant un angle connu avec l'axe des x; si l'on convient de représenter pour plus de simplicité les deux tangentes par Y et X, on aura pour équation du cercle OM

$$Y = aX.$$

On peut écrire ainsi la formule (1)

$$\frac{Y}{X} = \frac{\cot MAB}{\cot MBA} = \left(\frac{\tang MBA}{\tang MAB}\right).$$

Si l'on regarde le deuxième membre comme constant, on a ainsi l'équation d'un grand cercle mené par l'origine. De là résulte ce théorème :

Le lieu des sommets des triangles sphériques ayant une base commune (AB) *et dans lesquels les tangantes des angles à la base sont dans un rapport donné est une circonférence de grand cercle passant par le pôle de la base.*

Les triangles supplémentaires donnent un théorème inverse :

Si des triangles ont un angle commun et que les tangentes des côtés qui le comprennent soient en rapport constant, le troisieme côté passera par un point fixe situé à 90 degrés du sommet de l'angle commun.

Ce dernier théorème sert à trouver graphiquement une tangente qui soit quatrième proportionnelle à trois tangentes d'arcs donnés.

Le triangle BOP donne

$$\operatorname{tang} BPA = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos x},$$

de même

$$\operatorname{tang} BQA = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos y};$$

ainsi

$$\frac{\cos y}{\cos x} = \frac{\operatorname{tang} P}{\operatorname{tang} Q}.$$

Si le deuxième membre est constant, cette équation donnera le lieu du point M. Il serait facile d'y reconnaître une ellipse sphérique ayant son centre au point O.

Pour fixer la position d'un point sur la sphère, on le rapporte le plus ordinairement à deux axes rectangulaires. Ainsi en géographie on prend pour axes l'équateur et le premier méridien, et le point se détermine par sa latitude et sa longitude; mais on peut aussi, au lieu de l'arc de latitude, prendre pour ordonnée la projection de cet arc sur le premier méridien. Ce second mode de détermination a l'avantage de donner des formules symétriques par rapport à x et à y, et plus faciles à comparer avec leurs analogues sur le plan. Pour distinguer l'un de l'autre ces deux systèmes de coordonnées, nous appellerons les premières *coordonnées géographiques,* et les se-

condes *coordonnées géométriques ;* la formule pour passer d'un système à l'autre se trouve aisément par la résolution d'un triangle rectangle ; et si l'on appelle y la latitude et Y sa projection sur le premier méridien ou axe des Y, on trouve

$$\operatorname{tang} y = \operatorname{tang} Y \cos x,$$

x étant la longitude du point.

Il y a un cas particulier où les coordonnées géométriques ne détermineraient pas le point. C'est quand $x = \frac{\pi}{2}$, alors Y égale aussi $\frac{\pi}{2}$, et les deux arcs perpendiculaires aux axes qui donnent en général la position du point par leur rencontre se confondent dans ce cas particulier. Il faut donc se donner la latitude du point pour fixer sa position.

Problème. *Connaissant les coordonnées d'un point rapporté à des axes obliques, trouver sa distance à l'origine.*

On a déjà trouvé (p. 67)

$$\operatorname{tang} OM = \frac{\operatorname{tang} A}{\sin \alpha},$$

or

$$\operatorname{tang} A = \sin \theta \operatorname{tang} y.$$

D'ailleurs l'équation trouvée plus haut

$$\frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$$

donne

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} y \sin \theta}{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y \cos \theta},$$

d'où

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tang} y \sin \theta}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 y + \operatorname{tang}^2 x + 2 \operatorname{tang} y \operatorname{tang} x \cos \theta}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de tang OM, on a

$$\text{tang}^2 \text{OM} = \text{tang}^2 y + \text{tang}^2 x + 2 \,\text{tang}\, y \,\text{tang}\, x \cos\theta$$

ou, plus simplement,

$$Y^2 + X^2 + 2XY \cos\theta = r^2,$$

X, Y, r représentant des tangentes; si r est constant, Y et X variables, on aura l'équation d'un petit cercle ayant son pôle à l'origine et rapporté à des axes obliques; si

$$\theta = 90^\circ,$$

on aura

$$Y^2 + X^2 = r^2,$$

comme sur un plan.

Problème. *Trouver l'équation d'un grand cercle qui coupe les axes à des distances connues de l'origine* (α *et* β).

Soient A et B les traces du cercle donné, prenons un point M sur ce cercle; soient P et P' les centres de projections, N la projection de M sur l'axe des y, N' sur l'axe des x. Le triangle AOB coupé par l'arc transversal projetant NMP donnera (*)

$$\frac{\sin(\beta - y)}{\sin y} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin \text{MB}}{\sin \text{MA}} = 1,$$

de même

$$\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos\beta} \cdot \frac{\sin \text{MA}}{\sin \text{MB}} = 1.$$

(*)
$$\text{OA} = \alpha, \qquad \text{ON}' = x,$$
$$\text{OB} = \beta, \qquad \text{ON} = y,$$
$$\beta - y = \text{BN}, \qquad \alpha - x = \text{AN}'.$$

L'équation exprime le théorème de Ptolémée sur la transversale. Tm.

Si nous multiplions ces équations membre à membre, nous trouvons, en simplifiant,

$$\frac{\text{tang}\, y}{\text{tang}\, \beta} + \frac{\text{tang}\, x}{\text{tang}\, \alpha} = 1,$$

ou

$$\frac{Y}{b} + \frac{X}{a} = 1,$$

les lettres X, Y, a, b représentant des tangentes. La formule est démontrée pour des axes quelconques. On peut aussi l'écrire sous cette forme

$$y = Ax + b,$$

A représentant, si les axes sont rectangulaires, la cotangente en signe contraire de l'angle formé par l'axe des x avec un arc qui projetterait l'origine sur la circonférence donnée. L'équation de cet arc projetant serait donc

$$y = -\frac{1}{A}x,$$

si l'on cherche l'intersection de deux arcs, puis la distance de l'origine au point de rencontre, on trouvera, en appelant D la tangente de cette distance,

$$D = \pm \frac{b}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

D'où l'on voit que l'équation d'une circonférence de grand cercle éloignée de l'origine d'un arc D sera

$$y = Ax \pm D\sqrt{1 + A^2}.$$

Si A varie, D restant le même, ce sera l'équation d'une tangente quelconque à un cercle dont le centre est à l'origine, D représentant la tangente de la distance polaire

et A la cotangente en signe contraire de l'angle formé par l'axe des x et l'arc qui va du pôle au point de contact. Si l'on considère alternativement les deux signes, on aura les équations de deux tangentes menées aux extrémités du même diamètre; enfin si l'on cherche leur point de rencontre, on trouve $x = \infty$, ce qui fait voir que le point de rencontre est à 90 degrés de l'origine.

Pour achever de connaître ce point, il faut donc avoir la tangente de sa latitude: on trouve aisément qu'elle est égale à A.

Remarque. Connaissant les coordonnées du pôle d'un grand cercle, on peut en déduire la valeur de a et b. x', y' désignant les tangentes des coordonnées du pôle, on a évidemment

$$a = -\frac{1}{x'}, \quad b = -\frac{1}{y'},$$

ce qui permet de représenter une circonférence de grand cercle par l'équation

$$yy' + xx' - 1 = 0.$$

(BORGNET.)

L'équation d'une circonférence de grand cercle passant par un point donné sera évidemment

$$y - y' = A(x - x').$$

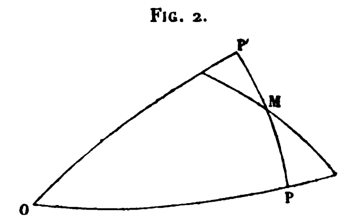
Cette équation ne s'applique pas au cas où le point donné serait à 90 degrés de l'origine, alors

$$x' = y' = \infty,$$

et il faut se servir de la latitude du point M que j'appellerai l. Pour cela, considérons le triangle POP' formé par les deux centres de projection et l'origine. Il est coupé

par l'arc donné au point M (MP est égal à l), et on a par

FIG. 2.



le théorème des transversales

$$\frac{\sin l}{\sin(\theta - l)} \cdot \frac{\sin a}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos 6}{\sin 6} = -1$$

ou

$$\frac{\tang 6}{\tang \alpha} = -\frac{\sin l}{\sin(\theta - l)}.$$

L'équation demandée sera donc

$$y = Ax + b,$$

A représentant $\frac{\sin l}{\sin(\theta - l)}$ ou simplement tang l si les axes sont rectangulaires. Si donc plusieurs circonférences ont un point commun situé à 90 degrés de l'origine, le coefficient de x sera le même dans leurs équations et ce coefficient sera la tangente de la latitude du point commun, les axes étant rectangulaires. Ce système de circonférences sera donc l'analogue d'un système de droites parallèles sur un plan.

L'équation d'une circonférence de grand cercle passant par deux points sera en général

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Si le deuxième point est à 90 degrés, l'équation sera

$$y - y' = A(x - x'),$$

A désignant la tangente de la latitude du deuxième point si les axes sont rectangulaires, et, dans le cas général, $\frac{\sin l}{\sin(\theta - l)}$.

Nous allons faire l'application des formules précédentes à quelques problèmes et théorèmes.

Définition. Étant donnés deux points A et B sur une sphère, si l'on prend sur l'arc qui les joint un troisième point O déterminé par l'équation

$$\frac{X - x'}{x'' - X} = \frac{m}{n},$$

X, x', x'' étant les tangentes des abscisses des trois points, ce troisième point, quand le rayon de la sphère devient infini, partage évidemment la ligne AB dans le rapport de m à n. Cela posé, nous dirons, pour abréger quelques énoncés, que ce point O partage l'arc AB suivant le *rapport sphérique* de m à n. On tire de l'équation

$$X = \frac{mx'' + nx'}{m + n}.$$

On voit aisément que la même relation existe pour les ordonnées, en sorte que

$$Y = \frac{my'' + ny'}{m + n}.$$

THÉORÈME. *Si l'on divise les trois côtés* c, b, a *d'un triangle sphérique, le premier suivant le rapport sphérique de* m *à* n, *le deuxième suivant le rapport de* p *à* m, *le troisième suivant le rapport de* n *à* p; *si l'on joint ensuite chaque point de division au sommet opposé, les trois arcs ainsi obtenus concourent au même point.*

Le calcul se fait identiquement comme sur un plan. Il suffit d'écrire les équations des trois arcs ramenées à la

forme

$$Ax + By + C = 0.$$

En ajoutant leurs premiers membres, on trouve identiquement zéro, ce qui prouve que les trois circonférences ont un point commun.

On trouve, pour les coordonnées du point de rencontre,

$$X = \frac{mx' + nx'' + px'''}{m + n + p}, \quad Y = \frac{my' + ny'' + py'''}{m + n + p}.$$

Les mêmes formules s'appliquent sur un plan; si, par exemple, on mène dans un triangle les trois bissectrices, on voit que les trois nombres m, n, p seront alors les trois côtés a, b, c; on aura donc pour les coordonnées du centre du cercle inscrit à un triangle rectiligne

$$X = \frac{ax' + bx'' + cx'''}{a + b + c}, \quad Y = \frac{ay' + by'' + cy'''}{a + b + c}.$$

S'il s'agissait du centre d'un des trois cercles exinscrits, il suffirait de changer le signe du côté qu'on n'aurait pas prolongé.

Si dans la formule relative à la division d'un arc suivant le rapport sphérique de m à n, on suppose $m = n$, on trouve

$$X = \frac{x' + x''}{2}, \quad Y = \frac{y' + y''}{2},$$

et dans le problème suivant si nous faisons

$$m = n = p,$$

on trouve

$$X = \frac{x' + x'' + x'''}{3}, \quad Y = \frac{y' + y'' + y'''}{3}.$$

Nous appellerons par analogie le point ainsi obtenu

centre sphérique des moyennes distances pour deux ou trois points. En général, nous appellerons centre sphérique des moyennes distances d'un système de n points, le point déterminé par les deux équations

$$X = \frac{\Sigma(x')}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma(y')}{n}.$$

THÉORÈME. *Étant donné un système de points sur la sphère, si l'on joint le centre sphérique des deux premiers au troisième, qu'on divise l'arc obtenu dans le rapport sphérique de* 1 *à* 2, *qu'on joigne le point trouvé au quatrième des points, puis qu'on divise l'arc de jonction dans le rapport sphérique de* 1 *à* 3, *et ainsi de suite, on trouvera aisément pour fixer la position du dernier point les équations*

$$X = \frac{\Sigma(x')}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma(y')}{n}.$$

Ce point est donc le centre sphérique du système de points; ce centre reste donc le même dans quelque ordre qu'on prenne les points.

Si l'on détermine d'abord le centre sphérique des moyennes distances de m points, puis le centre des $n - m$ qui restent, qu'on joigne ces deux points par un arc de grand cercle, enfin qu'on partage cet arc suivant le rapport sphérique de m à $(n - m)$, le point de division sera encore le centre sphérique des moyennes distances des n points donnés.

THÉORÈME. *Étant donné un système de* n + 1 *points, si l'on joint l'un quelconque d'eux au centre sphérique des moyennes distances de tous les autres, on obtiendra ainsi* n + 1 *arcs de grands cercles qui passeront par un point commun.*

Cela résulte comme conséquence du théorème précé-

dent. On peut aussi le démontrer directement par un calcul très-simple. Soit X_1 la tangente de l'abscisse du centre de tout le système et X_0 pour celui de n points, on aura

$$X_0 = \frac{\Sigma(x') - x'}{n} = \frac{X'(n+1) - x_1}{n},$$

de même

$$Y_0 = \frac{Y'(n+1) - y'}{n}.$$

L'équation du cercle passant par le centre de n points et par le $(n+1)^{ième}$ sera donc

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{Y_1 - y_1}{X_1 - x'},$$

cercle qui passe évidemment par le point dont les coordonnées sont Y' et X'. C. Q. F. D.

La suite prochainement.

QUESTION D'EXAMEN.

SUR LE NOMBRE DE POINTS QUI DÉTERMINENT UNE COURBE DU SECOND DEGRÉ.

En exprimant que les deux axes a, b d'une ellipse deviennent égaux entre eux, on a une circonférence qui se détermine par trois points. De sorte que l'égalité

$$a - b = 0$$

équivaut à deux conditions déterminantes. Il en est autrement dans l'hyperbole, l'égalité des axes n'équivaut plus qu'à une seule condition. C'est ce qu'on a proposé d'expliquer.

Cela tient à ce que, dans le cas de l'ellipse, le premier

membre de l'équation

$$a - b = 0$$

est la somme de deux carrés précédés du même signe, et, en conséquence, l'équation se partage et donne lieu à deux relations entre les coefficients de l'équation générale du second degré. Il n'en est plus de même pour l'hyperbole.

En effet, la réduction de l'équation générale du second degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

par la transformation des coordonnées, montre que les axes de l'ellipse représentée par cette équation sont entre eux comme les fonctions

$$(A + C) + \sqrt{(A - C)^2 + B^2},$$
$$(A + C) - \sqrt{(A - C)^2 + B^2},$$

et que le rapport de deux axes de l'hyperbole est égal au rapport de ces deux fonctions changé de signe.

Il s'ensuit que l'égalité des deux axes de l'ellipse est exprimée par l'équation

$$(A - C)^2 + B^2 = 0,$$

qui donne les deux conditions

$$A - C = 0, \quad B = 0,$$

tandis que l'égalité des axes de l'hyperbole exige seulement qu'on ait

$$A + C = 0.$$

G.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 195

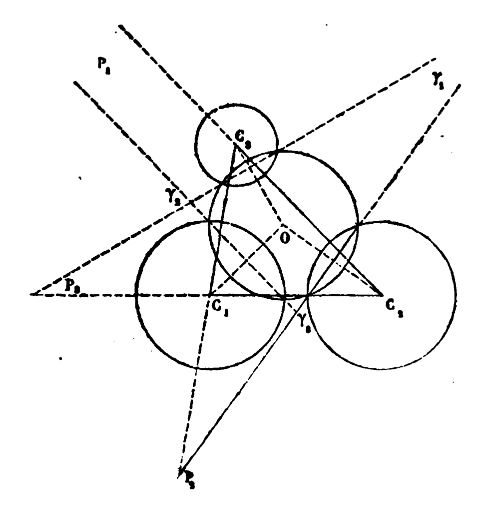
(voir t. XI, p. 198);

PAR M. L. DEWULF.

On donne trois cercles C_1, C_2, C_3; on trace trois nouveaux cercles, P_1 ayant même sécante commune que C_2 et C_3, et coupant C_1 orthogonalement; de même P_2 et P_3. Demontrer que ces trois nouveaux cercles ont même corde (réelle ou idéale) commune ou même axe radical.

Traçons le cercle orthotomique O aux trois cercles donnés, ce cercle est aussi orthotomique aux trois nouveaux cercles. Leurs axes radicaux passent donc par son centre.

Le centre de P_1 se trouve à l'intersection de la droite $C_2 C_3$ avec la corde $\gamma_2 \gamma_3$ commune à C_1 et à O.



On trouve de même les centres de P_2 et de P_3. Il faut démontrer que ces trois points sont en ligne droite.

Projetons la figure de manière que la droite P_1P_2 passe à l'infini.

$\gamma_2\gamma_3$ deviendra parallèle à C_2C_3 et C_1O sera perpendiculaire à C_2C_3.

$\gamma_1\gamma_3$ deviendra parallèle à C_1C_3 et C_2O sera perpendiculaire à C_1C_3.

O deviendra l'intersection de deux hauteurs du nouveau triangle; donc la projection de C_3O sera aussi perpendiculaire à C_1C_2 et P_3 passera aussi à l'infini. Donc, etc.

Remarques.

1°. C_1, C_2, C_3, γ_1, γ_2, γ_3 forment deux triangles polaires réciproques. Les droites qui joignent les sommets opposés se coupent en un même point, pôle de la ligne P_1P_3 par rapport au cercle orthotomique O.

2°. Les points C_1, C_2, C_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont sur une même conique, ce qui donne ce théorème : Les sommets de deux triangles polaires réciproques sont sur une même conique.

3°. Les côtés des deux triangles forment un hexagone circonscriptible à une conique.

On peut arriver à une solution aussi simple par l'analyse. Les trois axes radicaux de $P_1P_2P_3$ passent en O.

Soit $\varphi = 0$ l'équation homogène du cercle orthotomique O; soient $x_0y_0z_0$, $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$ les coordonnées des trois sommets du triangle $C_1C_2C_3$, et posons

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Les équations des lignes C_1C_2, C_1C_3, C_2C_3, $\gamma_1\gamma_2$,

$\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_3$ seront

$$\frac{d\varphi}{dx_0}x + \frac{d\varphi}{dy_0}y + \frac{d\varphi}{dz_0}z = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx_1}x + \frac{d\varphi}{dy_1}y + \frac{d\varphi}{dz_1}z = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx_2}x + \frac{d\varphi}{dy_2}y + \frac{d\varphi}{dz_2}z = 0,$$

et

$$\frac{d\Delta}{dx_0}x + \frac{d\Delta}{dy_0}y + \frac{d\Delta}{dz_0}z = 0,$$

$$\frac{d\Delta}{dx_1}x + \frac{d\Delta}{dy_1}y + \frac{d\Delta}{dz_1}z = 0,$$

$$\frac{d\Delta}{dx_2}x + \frac{d\Delta}{dy_2}y + \frac{d\Delta}{dz_2}z = 0.$$

Appelons $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$ les coordonnées des points P_1, P_2, P_3, et faisons

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

La condition pour que les trois points P_1, P_2, P_3 soient en ligne droite

$$\frac{dD}{dx'''}\cdot\frac{dD}{dy'} - \frac{dD}{dx'}\frac{dD}{dy'''} = D\,\frac{d^2D}{dx'''\,dy'} = 0$$

ou

$$D = 0,$$

équation qui se vérifie, mais par des calculs un peu longs.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 319

(voir t. XVI, p. 385);

PAR M. L. DEWULF.

Soient

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface,

$$(2) \qquad x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = 0$$

l'équation du plan P,

$$(3) \quad (x - x')\frac{dF}{dx'} + (y - y')\frac{dF}{dy'} + (z - z')\frac{dF}{dz'} = 0$$

l'équation du plan tangent à la surface en un point $x'y'z'$. Si ce point est dans le plan (2), l'équation de ce plan (2) pourra se mettre sous la forme

$$(4) \quad (x - x')\cos\alpha + (y - y')\cos\beta + (z - z')\cos\gamma = 0.$$

La projection de l'intersection des plans (3) et (4) sur le plan des xy aura pour équation

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & (x - x')\left(\frac{dF}{dx'}\cos\gamma - \frac{dF}{dz'}\cos\alpha\right) \\ & + (y - y')\left(\frac{dF}{dy'}\cos\gamma - \frac{dF}{dz'}\cos\beta\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation représente la projection de la tangente à la courbe I au point $x'y'z'$, ou aussi la tangente à la projection de la courbe I sur le plan xy en un point $x'y'$. La tangente à la courbe I' au point $x'y'$ est

$$(6) \qquad (x - x')\frac{dF}{dx'} + (y - y')\frac{dF}{dy'} = 0.$$

Si les équations (5) et (6) sont identiques, la projection de I est tangente à I′ aux points où I coupe le plan de I′, et cette identité a lieu si $\frac{dF}{dz'} = 0$ pour les coordonnées de ces points.

Dans le cas particulier des surfaces du second degré, si P′ est un plan principal, les plans tangents à la surface en un point quelconque de l'intersection de la surface et de P′ sont perpendiculaires au plan P′, et par suite $\frac{dF}{dz'} = 0$.

SUR LA THÉORIE DE DEUX CONIQUES;

Par M. G. SALMON.

C'est à M. Cayley que je dois beaucoup de ce qui suit.

1. Soient les équations des deux coniques

$$U_1 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = 0,$$

$$U_2 = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2d'yz + 2e'zx + 2f'xy = 0.$$

(Pour les équations homogènes dont nous ferons usage, voir *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 294.)

2. *Trouver les équations des cordes d'intersection des deux coniques.*

On sait que l'équation

$$U_1 + \lambda U_2 = 0$$

représente une conique qui passe par les quatre points d'intersection de U_1 de U_2. Maintenant il s'agit de déterminer λ tel, que cette équation soit décomposable en deux facteurs linéaires. Il est évident que la détermina-

tion doit dépendre d'une équation du troisième degré. Car par quatre points A, B, C, D nous pouvons tirer trois systèmes de deux lignes droites AB, CD; AC, BD; AD, BC. La condition que U_1 soit décomposable en de tels facteurs est

$$\Delta = abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2 = 0 \ (*).$$

Nous trouverons la condition que $U_1 + U\lambda_2$ soit ainsi décomposable, en substituant pour a, $a + \lambda a'$, pour b, $b + \lambda b'$, etc., et la condition sera

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta' = 0 \ (**)$$

où (comme c'est évident par le théorème de Taylor)

$$\Theta = a'\frac{d\Delta}{da} + b'\frac{d\Delta}{db} + c'\frac{d\Delta}{dc} + d'\frac{d\Delta}{dd} + e'\frac{d\Delta}{de} + f'\frac{d\Delta}{df}$$

ou bien

$$\Theta = a'(bc - d^2) + b'(ca - e^2) + c'(ab - f^2)$$
$$+ 2d'(ef - ad) + 2e'(fd - be) + 2f'(de - cf),$$
$$\Delta' = a'b'c' + 2d'e'f' - a'd'^2 - b'e'^2 - c'f'^2,$$
$$\Theta' = a\frac{d\Delta'}{da'} + b\frac{d\Delta'}{db'} + \ldots$$

3. Les coefficients Δ, Θ, Θ', Δ' sont des *invariants* (t. XVI, p. 406); c'est-à-dire que le rapport mutuel de ces quantités ne change pas quand on transforme les équations U_1, U_2 en prenant de nouveaux axes quelconques. Car si l'équation

$$U_1 + \lambda U_2 = 0$$

représente deux lignes droites, elle ne cessera pas de les représenter quand on transforme les équations comme

---

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. I, p. 491. Tm.

(**) On trouve cette équation dans l'admirable opuscule de M. Lamé sur les *méthodes* (1818); germe qui a été très-fécondé. Le principe de Harvey *omne vivum ex ovo* se vérifie partout. Tm.

on voudra, parce que nulle transformation de coordonnées ne change λ. Il faut donc, quand on cherche les valeurs de λ pour lesquelles $U_1 + \lambda U_2$ représente deux lignes droites, que l'on trouve toujours les mêmes valeurs de λ quels que soient les axes; d'où il suit que l'équation

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta' = 0$$

a toujours les mêmes racines, quelles que soient les formes de U_1 et U_2, d'où nous avons déduit les fonctions Δ, Θ, Θ', Δ'.

4. Pour faire voir l'usage que l'on peut tirer de ce principe, nous chercherons la condition (due à M. Cayley et d'ailleurs très-difficile à trouver) pour qu'un triangle soit inscrit à la conique U_1 et circonscrit à U_2 (*).

Si cela est possible et si nous appelons x, y, z les équations des côtés d'un tel triangle, il sera possible d'écrire U_1, U_2 sous les formes

$$U_1 = 2(xy + yz + zx) = 0,$$
$$U_2 = l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2 - 2lmxy - 2mnyz - 2nlzx = 0.$$

(*Voir* t. XVI, p. 307 et 308.)

Dans ce cas, nous avons

$$\Delta = 2,$$
$$\Theta = -(l + m + n)^2,$$
$$\Theta' = 4lmn(l + m + n),$$
$$\Delta' = -4l^2m^2n^2,$$

et, par conséquent,

$$\Theta'^2 = 4\Theta\Delta'.$$

Mais parce que Θ, Θ', Δ' sont des invariants, cette relation subsiste toujours quels que soient les axes (n° 3).

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 421. TM.

Ainsi la condition cherchée est

$$\left[\begin{array}{l} a(b'c' - d'^2) + b(c^2 a' - e'^2) + c(a'b' - f'^2) \\ + 2d(e'f' - a'd') + 2e(f'd' - b'c') \\ + 2f(d'e' - c'f') \end{array}\right]^2$$
$$= 4(a'b'c' + 2d'e'f' - a'd'^2 - b'e'^2 - c'f'^2)$$
$$\times [a'(bc - d^2) + b'(ca - e^2) + \ldots].$$

5. *Trouver la condition pour que les coniques* U_1, U_2 *se touchent.*

Nous avons dit que par quatre points A, B, C, D on peut faire passer trois systèmes de deux droites AB, CD; AC, BD; AD, BC. Mais si les points A, B coïncident, deux de ces systèmes aussi deviendront identiques, savoir: AC, BD; AD, BC. Dans ce cas donc, il faut que l'équation

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta' = 0$$

ait deux racines égales. La condition est

$$\Theta^2\Theta'^2 + 18\Delta\Delta'\Theta\Theta' = 3\Delta^2\Delta'^2 + 4\Delta\Theta'^3 + 4\Delta'\Theta^3.$$

6. Si l'équation

$$U_2 = 0$$

représente deux droites, on aura

$$\Delta' = 0,$$

et l'on voit que la condition pour que l'une ou l'autre de ces droites touche U_1 est

$$\Theta^2 = 4\Delta\Theta',$$

c'est aussi la condition pour que l'équation

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' = 0$$

ait deux racines égales.

7. Si U_2 est un carré parfait $(lx + my + nz)^2$, on

trouve que dans ce cas on aura

$$\Delta' = 0, \quad \Theta' = 0.$$

Le quadrilatère ABCD se change en un triangle dont deux côtés sont les tangentes aux points d'intersection de la droite $lx + my + nz = 0$ et de la conique $U_1 = 0$.

Déterminons λ par l'équation

$$\Delta + \lambda\Theta = 0;$$

nous trouvons que l'équation de ces tangentes est

$$\Theta U_1 - \Delta(lx + my + nz)^2 = 0 \ (*).$$

Mais si $\Theta = 0$, cette équation est réduite à

$$(lx + my + nz)^2 = 0,$$

d'où nous voyons que dans ce cas la droite $lx + my + nz$ touche la conique U_1. La condition donc pour que la droite $lx + my + nz$ touche U_1 est $\Theta = 0$, ou bien

$$l^2 \frac{d\Delta}{da} + m^2 \frac{d\Delta}{db} + n^2 \frac{d\Delta}{dc} + 2mn \frac{d\Delta}{dd} + 2nl \frac{d\Delta}{de} + 2lm \frac{d\Delta}{df} = 0$$

ou

$$l^2(bc - d^2) + m^2(ca - e^2) + n^2(ab - f^2) + 2mn(ef - ad) + 2nl(fd - be) + 2lm(dc - cf) = 0 \ (**).$$

Pour abréger, nous écrirons cette condition

$$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Dmn + 2Enl + 2Flm = 0.$$

8. Si ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point de la polaire réciproque de la conique U_1 (prise par rapport à $x^2 + y^2 + z^2 = 0$), nous trouverons l'équation de cette po-

(*) Car l'on a $U_1 + \lambda U_2 = 0$. Tm.

(**) Voir *Nouvelles Annales*, t. II, p. 108 :

$$A = \frac{d\Delta}{da}, \quad B = \frac{d\Delta}{db}, \ldots$$

Tm.

laire réciproque en exprimant la condition que la droite $x\xi + y\eta + z\zeta$ touche U_1. L'équation est donc

$$\Sigma_1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\eta\zeta + 2E\zeta\xi + 2F\xi\eta = 0 \ (*),$$

où A, B, etc., ont la signification que nous venons d'expliquer.

9. On a les relations suivantes, savoir :

$$BC - D^2 = \Delta a, \quad CA - E^2 = \Delta b, \quad AB - F^2 = \Delta c,$$
$$EF - AD = \Delta d, \quad FD - BC = \Delta e, \quad DE - AB = \Delta f \ (**),$$

d'où nous voyons que la polaire réciproque de la réciproque est ΔU_1, comme cela doit être.

10. Cherchons maintenant l'équation de la polaire réciproque de la conique $U_1 + \lambda U_2$.

Il faudra dans l'équation Σ_1 (n° 8) substituer pour a, $a + \lambda a'$, pour b, $b + \lambda b'$, etc., et on trouvera

$$\Sigma_1 + \lambda\Phi + \lambda^2\Sigma_2 = 0,$$

où

$$\begin{aligned}\Phi = & (bc' + b'c - 2dd')\xi^2 + (ca' + ac' - 2ee)\eta^2 \\ & + (ab' + ba' - 2ff')\zeta^2 + 2(ef' + e'f - ad' - a'd)\eta\xi \\ & + 2(fd' + df' - be' - b'e)\zeta\xi \\ & + 2(de' + d'e - cf' - c'f)\xi\eta.\end{aligned}$$

On obtient Σ_2 en accentuant a, b, c, etc., dans Σ_1.

11. On sait que l'équation

$$\Sigma_1 + \lambda\Phi + \lambda^2\Sigma_2 = 0,$$

qui contient le paramètre λ, représente une courbe qui touche toujours

$$\Phi^2 = 4\Sigma_1\Sigma_2.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales, Polaires réciproques.* Tm.
(**) Voir *Nouvelles Annales,* t. I, p. 490. Tm.

Mais parce que l'équation

$$U_1 + \lambda U_2 = 0$$

représente un système de coniques passant par quatre points, le système réciproque

$$\Sigma_1 + \lambda \Phi + \lambda^2 \Sigma_2 = 0$$

représentera un système de coniques touchant quatre droites. Il faut donc que

$$\Phi^2 = 4 \Sigma_1 \Sigma_3$$

représente ces quatre tangentes communes de Σ_1 et Σ_2. La forme de l'équation fait voir que la conique Φ passe par les points où les coniques Σ_1, Σ_2 sont touchées par les tangentes communes dont l'équation est

$$\Phi^2 = 4 \Sigma_1 \Sigma_2.$$

Nous voyons donc que les huit points où deux coniques sont touchées par leurs tangentes communes se trouvent sur une conique dont nous pouvons former l'équation.

12. On trouvera de même que la polaire réciproque de la conique

$$\Sigma_1 + \lambda \Sigma_2 = 0$$

est

$$\Delta U_1 + \lambda \mathfrak{F}_1 + \lambda^2 \Delta' U_2 = 0$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} = &(BC' + B'C - 2DD')x^2 + (CA' + AC' - 2EE')y^2 \\ &+ (AB' + BA' - 2FF')x^2 \\ &+ 2(EF' + E'F - AD' - AD)yz \\ &+ 2(FD' + DF' - BE' - B'E)zx \\ &+ 2(DE' + D'E - CF' - C'F)xy. \end{aligned}$$

L'équation des tangentes communes de U_1 et U_2 est

$$\mathfrak{F}^2 = 4 \Delta\Delta' U_1 U_2,$$

et $\mathfrak{F}$ est la conique qui passe par les huit points où U_1 et U_2 sont touchées par ces tangentes communes.

13. Nous allons faire voir comme on pourrait parvenir à ces coniques Φ, $\mathfrak{F}$ par une autre voie. En effet, on retrouvera la conique $\mathfrak{F}$ en cherchant le lieu d'un point d'où les tangentes à U_1, U_2 forment un faisceau harmonique, et la conique Φ en cherchant l'enveloppe d'une droite qui est coupée en section harmonique par les coniques U_1, U_2 (*).

14. Problème. *Trouver la condition pour que les quatre points sur l'axe des* x *donnés par les équations*

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad a'x^2 + 2b'x + c' = 0$$

forment un système harmonique ?

Si x_1, x_2 sont les racines de la première équation et x_3 x_4 de la seconde, nous aurons

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = 0.$$

Mais

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \quad (x_1 + x_2) = \frac{2b}{a},$$

$$x_3 x_4 = \frac{c'}{a'}, \quad (x_3 + x_4) = \frac{2b'}{a'};$$

donc la condition cherchée est

$$ac' + ca' - 2bb' = 0.$$

Si, rendant les équations homogènes, on pose

$$S_1 = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

$$S_2 = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 0,$$

(*) Il est évident que $\Phi = 0$, $\mathfrak{F} = 0$ sont des polaires réciproques ; $\Phi = 0$ est la conique qui passe par les huit points de contact relatifs à Σ_1 et Σ_2 et $\mathfrak{F} = 0$ la conique qui passe par les huit points de contact relatifs à $U_1 = 0$, $U_2 = 0$. Tm.

nous pouvons écrire cette condition sous cette forme

$$\frac{d^2 S_1}{dx^2}\frac{d^2 S_2}{dy^2} - 2\frac{d^2 S_1}{dxdy}\frac{d^2 S_2}{dxdy} + \frac{d^2 S_1}{dy^2}\frac{d^2 S_2}{dx^2} = 0$$

ou bien symboliquement

$$\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right)^2 S_1 S_2 = 0.$$

15. Problème. *Trouver la condition pour que la droite*

$$lx + my + nz = 0$$

soit coupée en section harmonique par les deux coniques U_1, U_2.

Afin de trouver les points où U_1 est coupée par la droite donnée, nous éliminons z entre les équations

$$U_1 = 0, \quad lx + my + nz = 0,$$

nous obtenons une équation S_1 homogène en x et y. Nous aurons ainsi

$$\frac{dS_1}{dx} = \frac{dU_1}{dx} - \frac{l}{n}\frac{dU_1}{dz},$$

$$\frac{dS_1}{dy} = \frac{dU_1}{dy} - \frac{m}{n}\frac{dU_1}{dz};$$

semblablement

$$\frac{dS_2}{dx} = \frac{dU_2}{dx} - \frac{l}{n}\frac{dU_2}{dz},$$

$$\frac{dS_2}{dy} = \frac{dU_2}{dy} - \frac{m}{n}\frac{dU_2}{dz}.$$

Par conséquent, nous avons

$$n\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right) S_1 S_2$$

$$= \left[\begin{array}{l} l\left(\frac{d}{dy_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dy_2}\frac{d}{dz_1}\right) + m\left(\frac{d}{dz_1}\frac{d}{dx_2} - \frac{d}{dz_2}\frac{d}{dx_1}\right) \\ \qquad\qquad + n\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right) \end{array}\right] U_1 U_2.$$

La condition donc que nous cherchons est

$$\left[\begin{array}{l} l\left(\frac{d}{dy_1}\frac{d}{dz_2}-\frac{d}{dy_2}\frac{d}{dz_1}\right)+m\left(\frac{d}{dz_1}\frac{d}{dx_2}-\frac{d}{dz_2}\frac{d}{dx_1}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +n\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2}-\frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right)\end{array}\right]^2 U_1 U_2 = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} l^2(bc'+b'c-2dd') &+ m^2(ca'+ac'-2ee') \\ &+ n^2(ab'+ba'-2ff') \\ &+ 2mn(cf'+fc'-ad'-a'd) \\ &+ 2nl(fd'+f'd-be'-b'e) \\ &+ 2lm(de'+d'e-cf'-e'f) = 0, \end{aligned}$$

et parce que l, m, n sont liés par une relation du second ordre, l'enveloppe de la droite est une conique dont l'équation est trouvée en prenant la polaire réciproque de Φ et qui est

$$\Theta' U_1 + \Theta U_2 - \mathfrak{F} = 0.$$

16. Problème. *Trouver l'équation des deux tangentes d'un point quelconque $\alpha\beta\gamma$ à une conique U_1.*

L'équation de la droite qui joint $\alpha\beta\gamma$ à un point quelconque x', y', z' est

$$x(\beta z' - \gamma y') + y(\gamma x' - \alpha z') + z(\alpha y' - \beta x') = 0,$$

et si $x'y'z'$ est un point sur l'une ou l'autre des deux tangentes, cette droite touchera U_1. On trouvera donc l'équation cherchée en formant la condition que la droite $lx + my + nz = 0$ touche U_1, et puis, substituant respectivement pour l, m, n,

$$\beta z - \gamma y, \quad \gamma x - \alpha z, \quad \alpha y - \beta x,$$

ou bien, en substituant en Σ_1 (n° 8),

$$\beta z - \gamma y, \quad \gamma x - \alpha z, \quad \alpha y + \beta x,$$

pour ξ, η, ζ.

17. Soit S_1 l'équation ainsi réduite, et nous aurons

$$\frac{dS_1}{dx} = \gamma\frac{d\Sigma_1}{d\eta} - \beta\frac{d\Sigma_1}{d\zeta},\quad \frac{dS_1}{dy} = \alpha\frac{d\Sigma_1}{d\zeta} - \gamma\frac{d\Sigma_1}{d\xi},$$

$$\frac{dS_2}{dx} = \gamma\frac{d\Sigma_2}{d\eta} - \beta\frac{d\Sigma_2}{d\zeta},\quad \frac{dS_2}{dy} = \alpha\frac{d\Sigma_2}{d\zeta} - \gamma\frac{d\Sigma_2}{d\xi},$$

$$\gamma\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right) S_1 S_2$$

$$= \left[\alpha\left(\frac{d}{d\eta_1}\frac{d}{d\zeta_2} - \frac{d}{d\eta_2}\frac{d}{d\zeta_1}\right) + \beta\left(\frac{d}{d\zeta_1}\frac{d}{d\xi_2} - \frac{d}{d\zeta_2}\frac{d}{d\xi_1}\right) + \gamma\left(\frac{d}{d\xi_1}\frac{d}{d\eta_2} - \frac{d}{d\xi_2}\frac{d}{d\eta_2}\right)\right]^2 \Sigma_1\Sigma_2.$$

La condition donc pour que le faisceau des tangentes du point α, β, γ soit harmonique est

$$\alpha^2(BC' + CB' - 2DD') + \ldots = 0,$$

ou bien

$$\mathfrak{L} = 0.$$

18. On sait qu'il y a trois points dont les polaires relativement à deux coniques sont les mêmes, et que (si ces trois polaires ont pour équations x, y, z) il est possible de donner aux équations des deux coniques les formes

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$
$$a'x^2 + b'y^2 + c'x^2 = 0.$$

[*Voir* mes *Conics*, p. 232 et 267 (*).]

Maintenant nous allons faire voir comment cette transformation est effectuée, et nous allons démontrer que, étant données les équations U_1, U_2 de deux coniques, les trois droites dont les pôles sont les mêmes pour les deux coniques, sont données par l'équation

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dx}\left(\frac{dU_1}{dy}\frac{dU_2}{dz} - \frac{dU_1}{dz}\frac{dU_2}{dy}\right) + \frac{d\mathfrak{L}}{dy}\left(\frac{dU_1}{dz}\frac{dU_2}{dx} - \frac{dU_1}{dx}\frac{dU_2}{dz}\right)$$
$$+ \frac{d\mathfrak{L}}{dz}\left(\frac{dU_1}{dx}\frac{dU_2}{dy} - \frac{dU_1}{dy}\frac{dU_2}{dy}\right) = 0.$$

(*) Ouvrage *hors ligne*, traduit par M. Poudra. TM.

équation que nous pouvons écrire sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{d\mathfrak{J}}{dx} & \frac{d\mathfrak{J}}{dy} & \frac{d\mathfrak{J}}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

D'abord on voit aisément que cela est vrai quand les coniques U_1, U_2 ont les formes

$$U_1 = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$
$$U_2 = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0.$$

Dans ce cas, on a

$$A = bc, \qquad B = ca, \qquad C = ab,$$
$$A' = b'c', \qquad B' = c'a', \qquad C' = a'b',$$
$$\mathfrak{J} = aa'(bc' + b'c)x^2 + bb'(ca' + ac')y^2 + cc'(ab' + c'b)z^2,$$

et le déterminant que nous venons d'indiquer est (à un facteur constant près)

$$xyz = 0.$$

Il faut donc démontrer que cette équation représente toujours ces mêmes droites quelle que soit la forme de U_1 et U_2.

19. Maintenant il faut observer que $\mathfrak{J}$ est un *covariant* (t. XVI, p. 406) des coniques U_1, U_2. Un covariant est un dérivé d'une équation (ou de plusieurs équations) tel, que sa relation aux équations primitives subsiste encore quand toutes les équations sont transformées par une transformation *linéaire* quelconque. Par exemple, la dé-

rivée $\frac{dU_1}{dx}$ n'est pas un covariant de U_1, parce que, quand on transforme l'équation aux nouveaux axes, le nouveau $\frac{dU_1}{dx}$ ne représente plus la même courbe. Mais parce que $\mathfrak{f}$ (la conique qui passe par les huit points de contact des tangentes communes de U_1 et U_2) est unique, il faut (quels que soient les axes) que nous trouvions une équation qui représente toujours la même courbe.

20. Ensuite nous allons démontrer que trois courbes U, V, W étant données, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} & \frac{dU}{dz} \\ \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} & \frac{dV}{dz} \\ \frac{dW}{dx} & \frac{dW}{dy} & \frac{dW}{dz} \end{vmatrix} \text{(*)}$$

est un *covariant* des trois courbes.

Il est bien connu que le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

est le déterminant

$$\begin{matrix} aA + bB + cC & aA' + bB' + cC' & aA'' + bB'' + cC'' \\ a'A + b'B + c'C & a'A' + b'B' + c'C' & a'A'' + b'B'' + c'C'' \\ a''A + b''B + c''C & a''A' + b''B' + c''C' & a''A'' + b''B'' + c''C'' \end{matrix} \Bigg|$$

(*) Quand U, V, W sont des cercles, cette dérivée représente le cercle qui coupe tous les trois cercles orthogonalement.

Or si nous remplaçons x, y, z par

$$x = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z},$$
$$y = a'\bar{x} + b'\bar{y} + c'\bar{z},$$
$$z = a''\bar{x} + b''\bar{y} + c''\bar{z},$$

nous avons

$$\frac{d}{d\bar{x}} = a\frac{d}{dx} + a'\frac{d}{dy} + a''\frac{d}{dz},$$
$$\frac{d}{d\bar{y}} = b\frac{d}{dx} + b'\frac{d}{dy} + b''\frac{d}{dz},$$
$$\frac{d}{d\bar{z}} = c\frac{d}{dx} + c'\frac{d}{dy} + c''\frac{d}{dz}\ (^*).$$

Nous voyons donc que si nous transformons linéairement U, V, W et puis formons la dérivée des équations transformées, nous aurons

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{d\bar{x}} & \frac{dU}{d\bar{y}} & \frac{dU}{d\bar{z}} \\ \frac{dV}{d\bar{x}} & \frac{dV}{d\bar{y}} & \frac{dV}{d\bar{z}} \\ \frac{dW}{d\bar{x}} & \frac{dW}{d\bar{y}} & \frac{dW}{d\bar{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} & \frac{dU}{dz} \\ \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} & \frac{dV}{dz} \\ \frac{dW}{dx} & \frac{dW}{dy} & \frac{dW}{dz} \end{vmatrix}$$

et quand les deux dérivées ne diffèrent que par un facteur constant, toutes les deux représentent la même courbe.

Donc

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx}\left(\frac{dU_1}{dy}\frac{dU_2}{dz_2} - \frac{dU_1}{dz}\frac{dU_2}{dy}\right) + \frac{d\mathfrak{F}}{dy}\left(\frac{dU_1}{dz}\frac{dU_2}{dx} - \frac{dU_1}{dx}\frac{dU_2}{dz}\right)$$
$$+ \frac{d\mathfrak{F}}{dz}\left(\frac{dU_1}{dx}\frac{dU_2}{dy} - \frac{dU_1}{dy}\frac{dU_2}{dx}\right) = 0$$

représente toujours la même courbe quels que soient les axes. Il était donc suffisant de démontrer qu'elle repré-

(*) Après les d il faut sous-entendre U, V, W. TM.

sente trois droites, en nous servant des plus simples équations.

21. On peut trouver facilement par cette méthode l'équation des plans principaux d'une surface du second degré.

Soient les termes quadratiques de l'équation

$$U_1 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy$$

que nous voulons réduire à la forme

$$U_1 = A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 + C\bar{z}^2.$$

Mais il faut observer que le carré de la distance d'un point à l'origine est, pour les deux systèmes de coordonnées,

$$U_2 = x^2 + y^2 + z^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2.$$

Si les axes primitifs sont obliques, nous substituons, pour $x^2 + y^2 + z^2$,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos(y, z) + 2zx\cos(z, x) \\ + 2xy\cos(x, y).$$

Formons l'expression $\mathfrak{F}$ de ces systèmes U_1, U_2, savoir :

$$\mathfrak{F} = [a(b+c) - e^2 - f^2]x^2 + [b(c+a) - f^2 - d^2]y^2 \\ + [c(a+b) - d^2 - e^2]z^2 + 2(ad - ef)yz \\ + 2(be - fd)zx + 2(cf - de)xy\ (^*),$$

et puis le déterminant dérivé de U_1, U_2, $\mathfrak{F}$ représente l'équation cubique des trois plans principaux $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ (page 95).

22. Nous ajoutons aussi la méthode de M. Boole pour trouver en grandeur les axes d'une surface du second degré. Il ne faut que former les invariants Δ, Θ, Θ', Δ' du

(*) *Voir* page 89 : l'on a $a' = b' = c' = 0$, $d' = e' = f' = 0$. TM.

système U_1, U_2. Et parce que nous avons pour l'équation transformée (page 84)

$$\Delta = ABC,\quad \Theta = AB + BC + CA,\quad \Theta' = A + B + C,\quad \Delta' = 1,$$

les quantités A, B, C (qui sont les réciproques des carrés des demi-axes) sont les racines de l'équation

$$\Delta' \lambda^3 - \Theta' \lambda^2 + \Theta \lambda - \Delta = 0$$

ou bien

$$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (bc - d^2 + ca - e^2 + ab - f^2)\lambda$$
$$- (abc + 2dcf - ad^2 - be^2 - cf^2),$$

équation cubique qui est très-connue dans cette théorie (*).

SECONDE SOLUTION D'UNE QUESTION SUR UN PRODUIT CONTINUEL

(voir t. XVI, p. 393);

PAR M. P. A. G.

Le produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$ de quatre nombres entiers consécutifs étant augmenté de l'unité, devient le carré de $n(n+3)+1$, somme formée du produit des deux facteurs extrêmes et de l'unité.

C'est ce que l'on rend immédiatement manifeste en multipliant par $n(n+3)$ les deux membres de l'identité

$$(n+1)(n+2) = n(n+3) + 2,$$

et ajoutant 1 de part et d'autre.

Conséquence. Le produit de quatre nombres entiers consécutifs ne peut être un carré.

(*) Pour comprendre les nos **21** et **22**, il faut se rappeler la théorie des changements des coordonnées. TM.

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir page 65);

PAR M. VANNSON.

THÉORÈME. *Étant donnés un triangle sphérique* ABC *et un point* O *sur la surface d'une sphère, si de ce point comme pôle on décrit une circonférence de grand cercle, qu'on joigne le point* O, *pris pour origine des coordonnées, au sommet* A *par un arc qu'on prolongera jusqu'à sa rencontre en* A′ *avec la circonférence, si ensuite on joint* A′ *avec le centre sphérique des deux autres sommets et qu'on répète la même opération trois fois en changeant de sommets, les trois circonférences ainsi obtenues auront un point commun.*

On peut généraliser le théorème en l'appliquant à un système de $(n+1)$ points, comme nous allons le faire voir.

Soient x', y' les tangentes des coordonnées du point A, l'équation de l'arc OA sera

$$y = \frac{y'}{x'}x;$$

toute circonférence passant par le point A′ aura pour coefficient de x, $\frac{y'}{x'}$. Donc la circonférence qui joint le point A′ au centre sphérique des n autres points sera représentée par l'équation

$$y - Y_0 = \frac{y'}{x'}(x - X_0);$$

mais on a trouvé dans le problème précédent

$$Y_0 = \frac{Y'(n+1) - y'}{n}, \quad X_0 = \frac{X'(n+1) - x'}{n},$$

valeurs qui étant portées dans l'équation précédente donnent

$$y-\frac{Y'(n+1)}{n}=\frac{y'}{x'}\left(x-\frac{X'(n+1)}{n}\right).$$

On voit donc que cette circonférence et toutes les analogues pour les autres points passent par un point commun ayant pour tangente de ses coordonnées

$$y=\frac{Y'(n+1)}{n},\quad x=\frac{X'(n+1)}{n},$$

d'où

$$\frac{y}{x}=\frac{Y'}{X'}.$$

Ce point se trouve donc sur la circonférence qui passe par le point O et le centre sphérique C des moyennes distances du système. On voit aussi que ce point partage l'arc OC suivant le rapport sphérique de $n+1$ à -1.

Le théorème analogue sur un plan se démontre par un calcul identique et peut s'énoncer ainsi :

Étant donné un système de (n + 1) *points et un autre point* O, *si l'on joint chaque point du système au point* O, *et si l'on mène à chacune des droites ainsi obtenues une parallèle par le centre des moyennes distances des autres points, toutes les parallèles se couperont en un même point qui sera situé sur la droite menée du point* O *au centre des moyennes distances de tout le système et qui partagera cette droite dans le rapport de* n + 1 *à* — 1, *c'est-à-dire qu'il sera sur le prolongement au delà du centre et que ses distances à* C *et à* O *seront comme* 1 *est à* n + 1.

Dans le cas particulier d'un triangle, les parallèles sont menées par les milieux des côtés, et le théorème se démontre très-simplement par la géométrie. Le même théorème s'applique aussi à un système de points dans

l'espace et se démontre de la même manière que sur la sphère.

Si les points du système se déplacent sans que leur centre de moyennes distances change de position, le point de rencontre des lignes parallèles sur un plan ou des arcs de grands cercles sur la sphère ne changera pas. De là résulte une propriété des polygones réguliers inscrits dans un cercle de centre fixe et de rayon variable. Elle aurait lieu également pour un polyèdre régulier inscrit dans une sphère avec les mêmes conditions.

Problème. *Étant donné un triangle* ABC, *si d'un point que nous supposerons sur le côté* CB *à une distance* α *du point* C *on mène un arc sécant qui rencontre* AB *en* C′ *et* AC *en* B′, *qu'on joigne* B, B′ *et* C, C′, *on demande le lieu du point de rencontre de ces arcs.*

Prenons C pour origine, CB et CA pour axes, et désignons CB par α', CA par $6'$ et la variable CB′ par 6.

Cela posé, l'équation de l'arc DB′ sera

$$\frac{y}{6}+\frac{x}{\alpha}=1,$$

celle de l'arc AB sera

$$\frac{y}{6'}+\frac{x}{\alpha'}=1.$$

Leur intersection aura pour équations

$$y=\frac{66'(\alpha-\alpha')}{\alpha6'-\alpha'6},\quad x=\frac{\alpha\alpha'(6'-6)}{\alpha6'-\alpha'6}.$$

L'arc CC′ aura donc pour équation

$$\frac{y}{x}=\frac{66'(\alpha-\alpha')}{\alpha\alpha'(6'-6)};$$

pour l'arc AB, c'est

$$\frac{y}{6}+\frac{x}{\alpha}=1.$$

Eliminant β entre ces équations, on trouvera

$$\alpha\alpha' y + \beta'(2\alpha - \alpha')x = \alpha\alpha'\beta';$$

c'est donc un grand cercle qui passe au sommet C du triangle et qui coupe CB en un point (E) pour lequel

$$x = \frac{\alpha\alpha'}{2\alpha - \alpha'}.$$

On tire de cette relation

$$(\alpha - \alpha')x = \alpha(\alpha' - x),$$

et, remplaçant ces lettres par des tangentes, on trouve

$$\sin CD \times \sin EB = \sin BD . \sin CE.$$

Ce qui prouve que les quatre points C, E, B, D sont harmoniques, et, par suite, que le lieu demandé est le quatrième arc d'un faisceau harmonique dont les trois autres sont AC, AB, AD, l'arc cherché étant conjugué de AD.

Cas particuliers. Si nous supposons

$$\alpha = \text{tang}\, 90^\circ = \infty,$$

nous aurons

$$x = \frac{\alpha'}{2}$$

ou

$$\text{tang}\, CE = \frac{1}{2} \text{tang}\, CB.$$

Si nous supposons en même temps

$$C = 90^\circ,$$

nous aurons aussi

$$\text{tang}\, CO = \frac{1}{2} \text{tang}\, OC',$$

O étant un point du lieu et C' la rencontre de l'arc CO avec AB.

De là résulte d'abord un moyen graphique de résoudre cette question : Étant donné un certain nombre d'arcs α, α', α'', trouver pour chacun d'eux un arc x tel, qu'on ait

$$\tang x = \frac{1}{2} \tang \alpha.$$

On peut en déduire aussi cette conséquence : Étant donnés un point C et une circonférence de grand cercle AB, si du point on mène un arc CC′ coupant la circonférence donnée en C′, si l'on prend sur cet arc un point O tel, qu'on ait

$$\tang CO = \frac{1}{2} \tang CC',$$

le lieu du point O sera une circonférence de grand cercle perpendiculaire à l'arc qui projette le point C sur la circonférence donnée. Si, au lieu de mener l'arc OC′ sécant à une circonférence, on le mène sécant à une courbe quelconque, le lieu du point O obtenu de même sera une autre courbe de même degré que la première et à laquelle il sera facile de mener une tangente en un point donné, ayant une fois tracé la tangente au point homologue de la courbe donnée. Il suffira, d'après ce qui précède, de projeter le point C sur cette tangente par un arc perpendiculaire CP, de prendre à partir de P sur l'arc tangent une distance PM de 90 degrés, et de joindre le point P au point C′ de la seconde courbe.

Si le point D par lequel on mène les arcs sécants au triangle ACB était pris à 90 degrés du milieu de la base CB, le lieu des intersections des diagonales du quadrilatère CBB′C′ serait l'arc qui joint le sommet A au milieu de la base.

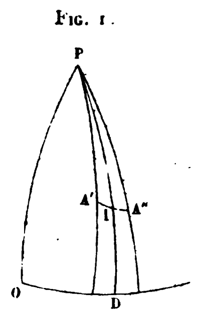
Théorème. *Étant donné un point* O *à* 90 *degrés du sommet d'un angle* A, *si de ce point* O *on mène deux*

arcs sécants Omn, Om′n′, *les tangentes des quatre segments à partir de* A *sur les côtés sont en proportion.*

Ce qui peut servir à résoudre graphiquement les deux questions : 1° construire une tangente quatrième proportionnelle à trois autres ; 2° mener par un point O un arc qui détermine sur les côtés deux segments dont les tangentes soient dans un rapport donné.

PROBLÈME. *Connaissant les coordonnées géographiques de deux points, trouver les coordonnées du milieu de l'arc qui les joint.*

FIG. 1.



Soient x', x'' les deux longitudes, y' et y'' les latitudes, I le milieu de l'arc A′, A″ ; appliquant le principe des sinus proportionnels aux deux triangles PA′I, PA″I dont les angles en P ont pour mesure $X - x'$ et $x'' - X$, nous aurons

$$\frac{\cos y'}{\sin I} = \frac{\sin A'I}{\sin (X - x')}$$

et

$$\frac{\cos y''}{\sin I} = \frac{\sin A''I}{\sin (x'' - X)};$$

divisant membre à membre, on trouve

$$\cos y'' \sin (x'' - X) = \cos y' . \sin (X - x'),$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} X = \frac{\sin x' \cos y' + \sin x'' \cos y''}{\cos x' \cos y' + \cos x'' \cos y''}.$$

Si nous supposons les deux points à égale distance de l'origine, nous aurons

$$\cos x' \cos y' = \cos x'' \cos y'',$$

et en divisant le premier terme du numérateur par $\cos x' \cos y'$ et le deuxième par $\cos x'' \cos y''$, nous aurons

$$\operatorname{tang} X = \frac{\operatorname{tang} x' + \operatorname{tang} x''}{2}$$

ou plus simplement

$$X = \frac{x' + x''}{2},$$

ces trois lettres représentant des tangentes. Nous aurons de même

$$Y = \frac{Y' + Y''}{2},$$

ces trois lettres représentant, non plus les tangentes des latitudes, mais des ordonnées prises sur l'axe des y. On voit par là que le point que nous avions appelé centre des moyennes distances de deux points n'est autre chose que le milieu de l'arc qui les joint, mais seulement quand ces deux points sont équidistants de l'origine.

Corollaire I. Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant son pôle à l'origine et qu'on trace les trois médianes, on trouvera, pour déterminer leur point de rencontre, les équations

$$X = \frac{X' + X'' + X'''}{3}, \quad Y = \frac{y' + y'' + y'''}{3},$$

expressions déjà trouvées et qui déterminent le centre sphérique des moyennes distances pour les trois sommets.

Ainsi le centre sphérique des moyennes distances des trois sommets d'un triangle n'est autre chose que la rencontre des trois médianes, mais seulement quand les trois sommets sont équidistants de l'origine.

Corollaire II. Si un quadrilatère est inscrit dans un cercle, les arcs qui joignent les milieux des côtés opposés et celui qui joint les milieux des diagonales concourent au même point, et si l'on prend le pôle du cercle comme origine, les coordonnées du point de rencontre seront données par les formules

$$X = \frac{\Sigma x'}{4}, \quad Y = \frac{\Sigma y'}{4}.$$

PROBLÈME. *Étant données les coordonnées géographiques de deux points* (x′ y′, x″ y″), *si l'on partage l'arc qui les joint en deux segments dont les sinus sont comme* m *est à* n, *on trouvera pour la longitude du point de division, en opérant comme dans le problème précédent*

$$X = \frac{n \sin x' \cos y' + m \sin x'' \cos y''}{n \cos x' \cos y' + m \cos x'' \cos y''}.$$

Si les deux points sont équidistants de l'origine, il vient

$$X = \frac{nx' + mx''}{m + n},$$

de même

$$Y = \frac{nY' + mY''}{m + n},$$

ainsi l'arc est partagé suivant le rapport sphérique de m à n.

Si l'on circonscrit un cercle à un triangle et qu'on prenne le pôle de ce cercle pour origine, on reconnaîtra facilement, d'après ce qui précède, que les coordonnées du point où les bissectrices se rencontrent sont

données par les formules

$$X = \frac{x' \sin a + x'' \sin b + x''' \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c},$$

$$Y = \frac{y' \sin a + y'' \sin b + y''' \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c}.$$

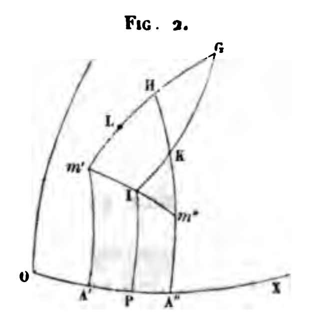
Corollaire. Les résultats précédents donnent le moyen de construire un arc X sachant qu'on a

$$\operatorname{tang} X = \frac{m \operatorname{tang} x' + n \operatorname{tang} x''}{m + n}.$$

Nous supposons que m et n sont des sinus.

Soient pris, sur l'axe OX, $OA' = x'$, $OA'' = x''$, de O comme pôle décrivons un cercle $m'\,m''$, prenons m''K égal

Fig. 2.



à l'arc dont le sinus est m et KH égal à l'arc dont le sinus est n, joignez m' et H; à partir de L, milieu de M' H, prenez $LG = \frac{\pi}{2}$; joignez G à K par un arc qu'on prolongera jusqu'en I; on aura évidemment

$$\frac{\sin m'' I}{\sin m' I} = \frac{m}{n}.$$

Si donc on projette I sur OX par l'arc IP, on aura

$$\operatorname{tang} OP = \frac{m \operatorname{tang} x' + n \operatorname{tang} x''}{m + n}.$$

Si l'on avait $m=n$, l'expression à construire serait

$$\tang X = \frac{\tang x' + \tang x''}{2};$$

il suffirait de projeter le point milieu de $m' m''$ sur OX. On construirait d'une manière analogue un arc X donné par l'équation

$$\tang X = \frac{\tang x' + \tang x'' + \tang x'''}{3}.$$

La suite prochainement.

NOTE SUR LA QUESTION RÉSOLUE PAGES 376, 430 ET 463 (Tome XVI);

PAR M. VANNSON.

On donne l'équation

$$x = \mathrm{A} \sin x + \mathrm{B},$$

trouver le nombre des racines réelles.

La solution donnée page 376 ne précise pas le nombre des racines. Celle donnée page 430 me semble présenter une assertion inexacte. L'auteur dit (p. 431) : « Dans l'intervalle de x' à $x'+\pi$ la dérivée $1 - \mathrm{A}\cos x$ s'annule au plus une fois, soit $x' = \frac{3\pi}{2}$; depuis $\frac{3\pi}{2}$ jusqu'à $\frac{5\pi}{2}$ la dérivée, A étant supposé positif s'annule deux fois. De plus, quand on arrive à des valeurs de x qui donnent des résultats de même signe, il est bon de faire voir que ces nombres substitués ne comprennent pas de racines de la proposée quoiqu'ils puissent comprendre des racines de la dérivée égalée à zéro.

Pour tenir compte de ces remarques, je proposerai la rédaction suivante qui s'écarte peu de la marche suivie par M. Jozon.

Je supposerai

$$A > B, \quad A > 0, \quad B > 0.$$

Si nous remplaçons x par

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \pi \ldots, \quad \frac{\pi}{2} + h\pi \ldots, \quad \frac{\pi}{2} + z\pi,$$

nous trouvons alternativement plus et moins. J'appelle z le dernier multiplicateur de π pour lequel cette alternance de signes ait lieu; quand h est impair, on a toujours moins; donc z est impair, sans quoi $z+1$ donnerait le signe moins, et comme par hypothèse z a donné plus, nous n'aurions pas atteint la limite. Ainsi $\frac{\pi}{2} + z\pi$ mis à la place de x a donné moins; le nombre précédent $\frac{\pi}{2} + (z-1)\pi$ a donc dû donner plus, ce qui donne l'égalité ($z-1$ étant pair)

$$A + B - z\pi + \frac{\pi}{2} > 0$$

ou

$$z < \frac{A+B}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Il faut donc prendre pour z le nombre *impair* immédiatement au-dessous de $\frac{A+B}{\pi} + \frac{1}{2}$. Supposons comme dans l'exemple

$$A = A'\pi, \quad B = B'\pi,$$

A', B' étant entiers, on aura

$$z = A' + B',$$

si cette somme est impaire, et, dans le cas contraire,

$$z = A' + B' - 1.$$

Dans l'exemple donné, c'est $A' + B' - 1$ qui donne le nombre des racines positives. Remplaçons maintenant x par la série décroissante

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \pi, \quad \frac{\pi}{2} - 2\pi, \ldots, \quad \frac{\pi}{2} - h\pi, \ldots, \quad \frac{\pi}{2} - z'\pi, \ldots,$$

on aura alternativement plus et moins; c'est toujours plus quand h est pair, donc z' est un nombre pair, sans quoi le résultat de la dernière substitution serait négatif, et $\frac{\pi}{2} - (z' + 1)\pi$ donnant le signe $+$, la série ne serait pas complète. L'avant-dernier terme, savoir $\frac{\pi}{2} - (z' - 1)\pi$ a donc donné le signe moins, ce qui conduit à l'inégalité

$$B - A + z'\pi - \frac{3\pi}{2} < 0,$$

d'où

$$z' < \frac{A - B}{\pi} + \frac{3}{2}.$$

Il faudra prendre pour z' le plus grand nombre *pair* satisfaisant à cette inégalité. Conservant les suppositions déjà admises, on aura

$$z' < A' - B' + 1 + \frac{1}{2};$$

si $A' + B'$ est impair, $A' - B'$ le sera aussi et on aura

$$z' = A' - B' + 1.$$

Le nombre total des racines trouvées est alors $2A' + 1$. Dans le cas où $A' - B'$ est pair, on a

$$z' = A' - B',$$

et le nombre des racines obtenues est

$$2A' - 1 = 1999$$

si $A' = 1000$ et $B' = 50$. Il reste à démontrer qu'entre deux termes consécutifs de la série

$$h\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad (h+1)\pi + \frac{\pi}{2},$$

il ne tombe qu'une racine; en effet si h est pair, le cosinus d'un arc compris entre ces deux termes est négatif, donc il n'y a dans cet intervalle aucune racine de la dérivée égalée à zéro; mais si h est impair, il tombe entre $h\pi + \frac{\pi}{2}$ et $(h+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ deux racines de l'équation

$$\varphi' x = 0.$$

Pour qu'il en résultât l'existence de trois racines entre les nombres substitués, il faudrait que la première racine de $\varphi' x = 0$ donnât à φx un signe contraire à celui que donne $h\pi + \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire le signe plus, et que la deuxième racine donnât moins.

Soit x' la plus petite racine positive de l'équation

$$A \cos x - 1 = 0$$

obtenue en égalant la dérivée à zéro. Les deux racines de cette même équation entre $h\pi + \frac{\pi}{2}$ et $(h+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ sont

$$(h+1)\pi - x' \quad \text{et} \quad (h+1)\pi + x';$$

pour que la première mise au lieu de x dans l'équation proposée donne plus, il faut avoir

$$-A \sin x' + B - (h+1)\pi + x' > 0,$$

et pour que la deuxième donne moins, il faut avoir

$$A \sin x' + B - (h+1)\pi - x' < 0;$$

d'où l'on peut tirer

$$A < \frac{x'}{\sin x'}.$$

Mais

$$A = \frac{1}{\cos x'},$$

on aurait donc

$$\tang x' < x',$$

ce qui est impossible.

Si l'on objectait que le problème revient à couper une sinusoïde par une droite et qu'il peut évidemment y avoir trois intersections entre les abscisses $3\frac{\pi}{2}$ et $5\frac{\pi}{2}$, il suffirait de remarquer qu'il faut avoir pour cela l'ordonnée de la droite à l'origine plus grande que 1 en valeur absolue, d'où il résulte $A < B$, et c'est le cas contraire que nous avons supposé. On verra de la même manière que si deux termes $h\pi + \frac{\pi}{2}$ et $(h+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ donnent dans l'équation des résultats de signe moins, ils ne comprennent entre eux aucune racine de l'équation.

Car s'ils comprenaient deux racines, il devrait y avoir entre eux une racine de $\varphi' x = 0$ donnant à φx une valeur positive; nous supposerons h impair, afin qu'il y ait des racines de $\varphi' x = 0$ entre $h\pi + \frac{\pi}{2}$ et $(h+1)\pi + \frac{\pi}{2}$. La racine de $\varphi' x = 0$ qui peut donner un résultat positif est $(h+1)\pi + x'$ et il faudrait avoir pour cela l'inégalité

$$A \sin x' + B - (h+1)\pi - x' > 0,$$

d'où

$$h + 1 < A' \sin x' + B' - \frac{x'}{\pi} < A' + B' - \frac{\theta}{2},$$

θ étant plus petit que 1. D'où

$$h < A' + B' - 1.$$

En sorte que les nombres substitués à x appartiendraient à la série de substitutions pour lesquelles on a trouvé des résultats de lignes alternativement positifs et négatifs; ce qui est contre l'hypothèse.

SOLUTION DES QUESTIONS 401, 402 ET 403

(voir t. XVI, p. 401);

PAR M. A. CHANSON ET P. CHALLIOT (*),
Élèves au lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Question 401.

On projette un point d'une ellipse sur les deux axes, démontrer que l'enveloppe de la droite qui joint les deux projections est la développée d'une ellipse.

Même question pour l'hyperbole.

Soient x_1, y_1 les coordonnées d'un point de l'ellipse, on aura

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1; \tag{1}$$

l'équation de la droite joignant les pieds des perpendiculaires sera

$$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=1. \tag{2}$$

Appliquant le théorème qui sert à trouver les courbes enveloppes, nous aurons

$$\frac{\left(\frac{2x_1^2}{a^2}\right)}{\left(-\frac{x}{x_1^2}\right)}=\frac{\left(\frac{2y_1^2}{b_2}\right)}{\left(-\frac{y}{y_1^2}\right)}$$

(*) MM. Laquières, Carenou, Lamacq, Mendes, élèves du lycée Saint Louis, ont adressé des solutions analogues.

ou

$$\frac{x_1^3}{a^2 x} = \frac{y_1^3}{b^2 y} = k^3;$$

on tire de là

$$x_1 = k(a^2 x)^{\frac{1}{3}}, \quad y_1 = k(b^2 y)^{\frac{1}{3}}.$$

Portant dans les équations (1) et (2), la première donne

$$k^2 \left[\frac{(a^2 x)^{\frac{2}{3}}}{a^2} + \frac{(b^2 y)^{\frac{2}{3}}}{b^2}\right] = 1$$

ou

$$(3) \qquad k^2 \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}\right] = 1.$$

La seconde donne

$$k = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}.$$

Remplaçant k par cette valeur dans l'équation (3), il viendra

$$\left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}\right]^3 = 1,$$

d'où

$$(bx)^{\frac{2}{3}} + (ay)^{\frac{2}{3}} = (ab)^{\frac{2}{3}},$$

équation de la développée d'une ellipse dont nous allons chercher les axes.

La développée d'une ellipse dont les axes sont A, B a pour équation

$$(\mathrm{A}x)^{\frac{2}{3}} + (\mathrm{B}y)^{\frac{2}{3}} = (\mathrm{C}^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Pour que ces deux équations soient identiques, il faut que

les coefficients soient respectivement proportionnels

$$\frac{A}{b} = \frac{A^2 - B^2}{ab} = \frac{B}{a},$$

d'où l'on déduit

$$A = \frac{ab^2}{b^2 - a^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{a^2 b}{b^2 - a^2}.$$

Quant à l'hyperbole, comme l'équation de l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

ne diffère de celle de l'ellipse qu'en ce que b^2 est remplacé par $-b^2$, il suffit, dans le résultat final, de remplacer b^2 par $-b^2$ et l'on a

$$(ay)^{\frac{2}{3}} - (bx)^{\frac{2}{3}} = - (ab)^{\frac{2}{3}}.$$

Question 402.

On projette orthogonalement un point d'un ellipsoïde sur ses trois plans principaux, trouver l'enveloppe du plan qui passe par les trois points.

Même question pour les deux hyperboloïdes.

Soient x', y', z' les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde, on aura

$$(1) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1.$$

L'équation du plan passant par les pieds des trois perpendiculaires sera

$$(2) \qquad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 2.$$

Appliquant le théorème qui sert à trouver les surfaces enveloppes, nous obtiendrons

$$\frac{x_1^3}{a^2 x} = \frac{y_1^3}{b^2 y} = \frac{z_1^3}{c^2 z} = k^3,$$

d'où

$$x_1 = k\,(a^2 x)^{\frac{1}{3}}, \quad y_1 = k\,(b^2 y)^{\frac{1}{3}}, \quad z_1 = k\,(c^2 z)^{\frac{1}{3}}.$$

Portant dans les équations (1) et (2), la première donne

$$k^2 \left[\frac{(a^2 x)^{\frac{2}{3}}}{a^2} + \frac{(b^2 y)^{\frac{2}{3}}}{b^2} + \frac{(c^2 z)^{\frac{2}{3}}}{c^3} \right] = 1$$

ou bien

$$(3) \qquad k^2 \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \right] = 1,$$

et la seconde donne

$$k = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \right].$$

Remplaçant k par sa valeur dans l'équation (3), on obtient

$$\frac{1}{4} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \right]^2 = 1$$

ou

$$(bcx)^{\frac{2}{3}} + (acy)^{\frac{2}{3}} + (abz)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}.\,a^{\frac{2}{3}}.\,b^{\frac{2}{3}}.\,c^{\frac{2}{3}};$$

enfin

$$(bcx)^{\frac{2}{3}} + (acy)^{\frac{2}{3}} + (abz)^{\frac{2}{3}} = (2abc)^{\frac{2}{3}},$$

équation qui a beaucoup d'analogie avec celle de la développée de l'ellipse.

L'hyperboloïde à une nappe ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

il suffit de remplacer dans l'équation ci-dessus c^2 par $-c^2$, ce qui donne

$$-(bcx)^{\frac{2}{3}} - (acy)^{\frac{2}{3}} + (abz)^{\frac{2}{3}} = -(2abc)^{\frac{2}{3}}$$

ou

$$(bcx)^{\frac{2}{3}} + (acy)^{\frac{2}{3}} - (abz)^{\frac{2}{3}} = (2abc)^{\frac{2}{3}}.$$

Quant à l'hyperboloïde à deux nappes, son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

ou

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

il suffit, dans le résultat final, de remplacer a^2 et b^2 par $-a^2$ et $-b^2$, ce qui donne

$$-(bcx)^{\frac{2}{3}} - (acy)^{\frac{2}{3}} + (baz)^{\frac{2}{3}} = (2abc)^{\frac{2}{3}}$$

ou

$$(bcx)^{\frac{2}{3}} + (acy)^{\frac{2}{3}} - (abz)^{\frac{2}{3}} = -(2abc)^{\frac{2}{3}}.$$

Question 403.

Ecrire l'équation d'un faisceau de surfaces qui passent par le point (x', y', z') et par l'intersection des deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

L'équation générale des surfaces passant par l'intersection des deux surfaces proposées sera

$$\lambda f(x, y, z) + \varphi(x, y, z) = 0,$$

λ étant une indéterminée arbitraire. Exprimons que le point $(x' y' z')$ est sur la surface

$$\lambda f(x', y', z') + \varphi(x', y', z') = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{\varphi(x', y', z')}{f(x', y', z')},$$

par suite l'équation demandée est

$$\frac{f(x, y, z)}{f(x', y', z')} = \frac{\varphi(x, y, z)}{\varphi(x', y', z')}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 422

(voir p. 32);

PAR M. P. DELESTRÉE,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot),
MM. LAQUIÈRES, FÉNÉON,
Élèves du lycée Saint-Louis,
M. BERGIS,
Élève de l'institution Mayer.
ET M. S. DE SILGUY,
Élève des Carmes (classe de M. Gerono.)

Discuter et construire le lieu représenté par l'équation

$$yx^2 + bx + c = 0.$$

Nous aurons quatre cas à considérer suivant que

$$\begin{array}{ll} b > 0, & c > 0, \\ b < 0, & c < 0; \\ b > 0, & c < 0, \\ b < 0, & c > 0; \end{array}$$

mais il suffira de faire la discussion en détail pour le premier cas, parce que les autres ne diffèrent du premier qu'en ce que la position relative des branches de courbe par rapport aux axes se trouve changée.

Résolvant par rapport à y,

$$y = -\frac{bx + c}{x^2}.$$

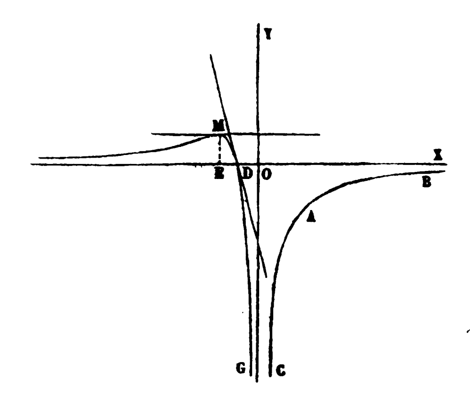
Pour toutes les valeurs positives de x, y reste constamment négative ; de plus pour $x = 0$,

$$y = \infty,$$

puis y décroît ensuite à mesure que x augmente, et quand on a $x = \infty$,

$$y = 0.$$

On obtient ainsi la branche CAB. Si nous donnons maintenant à x des valeurs négatives à partir de o, y est



d'abord infiniment grand négatif, puis il décroît en valeur absolue jusqu'à devenir nulle quand $x = -\frac{c}{b}$; audelà, elle prend des valeurs positives, croît d'abord, puis décroît ensuite jusqu'à o quand x est infinie après avoir passé par une valeur maximum. Nous obtiendrons ce maximum en cherchant les points où la tangente est horizontale. Prenant la dérivée,

$$y' = \frac{bx + 2c}{x^3}.$$

Un seul point a donc sa tangente horizontale, et ce point

a pour coordonnées

$$x = -\frac{2c}{b},$$

$$y = \frac{b^2}{4c}.$$

Il est à remarquer que l'abscisse OE est précisément le double de OD. Pour obtenir les points d'inflexion de la courbe, j'égale à zéro la dérivée seconde,

$$y'' = -\frac{2bx + 3c}{x^4}.$$

De là on déduit pour le point d'inflexion les coordonnées

$$x = -\frac{3c}{2b},$$

$$y = \frac{2b^2}{9c}.$$

Pour déterminer plus complétement la courbe, proposons-nous de chercher les tangentes aux points remarquables.

En D

$$y = 0,$$

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Le coefficient angulaire de la tangente est $-\frac{b^3}{c^2}$; au point d'inflexion, ce coefficient a pour valeur $\frac{4b^3}{27c^2}$.

On peut encore remarquer que les valeurs

$$x = -\frac{c}{2b} \quad \text{et} \quad x = \frac{c}{b}$$

substituées dans l'équation donnent pour y la même

quantité, ce qui prouve que la branche DG se rapproche plus vite de l'axe des y que la branche ABC.

En résolvant par rapport à y, on voit que l'hyperbole $xy = -\frac{b}{2}$ est diamétrale par rapport à la courbe donnée.

La discussion pour les trois autres cas serait identique.

(*) L'hyperbole diamétrale et la courbe proposée ont toutes deux pour asymptotes les axes coordonnés. Cette proposition est évidente pour $xy = -\frac{b}{2}$; nous pouvons la démontrer pour la courbe en appliquant la méthode générale des asymptotes; j'obtiens ainsi pour le coefficient angulaire

$$\lim \frac{y}{x} = c = 0$$

et pour l'ordonnée à l'origine

$$d = 0;$$

donc les asymptotes pour la courbe proposée sont bien encore les axes.

Note du Rédacteur. 1°. Les Européens habitent l'hémisphère boréal et écrivent de gauche à droite. De là l'usage de prendre les $+x$, direction de l'axe OX de gauche à droite, et les $-x$, direction de OX′ de droite à gauche; les $+y$, direction de OY vers le nord, et les $-y$, direction de OY′ vers le sud; les $+z$ vers le zénith, direction de l'axe OZ, et les $-z$, direction de OZ′ vers le nadir. Toutefois en mécanique on prend OZ vers le nadir, parce que c'est la direction de la pesanteur. De même pour étudier les mouvements des lignes trigonométriques, nous

(*) Ce qui suit est de l'élève Delestrée.

faisons volontiers parcourir la circonférence par un point de gauche à droite : la direction opposée choque nos habitudes européennes. Les Orientaux, écrivant de droite à gauche, ont d'autres habitudes. Léonard de Vinci écrivait l'italien de droite à gauche : caprice d'artiste.

On connaît l'importante différence entre les directions *dextrorsum* et *sinistrorsum* dans l'électricité dynamique et dans les phénomènes de polarisation.

2°. Soit

$$yx^2 + bz + c = 0$$

l'équation d'une surface du troisième degré ; donnons à y la valeur constante a. On obtient

$$z = \frac{c - ax^2}{b};$$

et prenons cette suite de valeurs de z,

$$x = 0, \quad z_1 = \frac{c}{b},$$

$$x = z_1, \quad z_2 = \frac{c - az_1^2}{b} = \frac{cb^2 - ac^2}{b^3},$$

$$x = z_2, \quad z_3 = \frac{c - az_2^2}{b} = \frac{cb^3 - abc^2 + a^2c^3}{b^4},$$

. . . .

$$x = z_n, \quad z_{n+1} = \frac{c - az_n}{b}.$$

Il est évident que z_{n+1} est une fonction de a, b, c dont la formation est une question très-difficile de calcul inverse des différences, non encore résolue. M. Gerono a le premier découvert cette belle et utile propriété de ces fonctions (t. XVI, p. 436). Lorsque a, b, $b^2 + 4ac$ sont positifs et que l'on a

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2};$$

alors x' étant la plus petite racine de l'équation

$$ax^2 + bx - c = 0,$$

la série z_1, z_3, z_5, etc., décroît vers x' et la série x_2, x_4, x_6, etc., croît vers x' et $z = x'$.

Le plan qui a pour équation

$$y = a$$

coupe la surface suivant une ligne dont la projection sur le plan xz est la parabole

$$ax^2 + bz - c = 0.$$

L'intersection de cette parabole par la bissectrice $x = z$ donne les deux racines de l'équation

$$ax^2 + bx - c = 0.$$

Soit x' la plus petite racine, les valeurs des z_n seront alternativement au-dessus et au-dessous du plan $z = x'$.

Pour la vraie signification des racines infinies, il faut lire la Note de M. Gerono (t. III, p. 32; 1844); c'est ce qu'on a dit de plus satisfaisant, de plus rationnel et de plus complet sur cette matière.

SOLUTION DE LA QUESTION 415

(voir, p. 81);

PAR M. ERNEST MALINVAUD,
Élève de l'institution Bourdeau, à Limoges.

On suppose que dans les deux triangles ABC, *abc*, les angles A et *a* sont égaux; de plus les côtés BC, *bc* opposés à ces angles sont entre eux dans le rapport des péri-

mètres des triangles. Démontrer que ces triangles sont semblables.

Appelons a, b, c et a', b', c' les côtés des deux triangles, $2p$ et $2p'$ les périmètres. Les conditions de la question nous fournissent les relations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{a}{a'} = \frac{p}{p'} = \frac{p-a}{p'-a'} = \frac{b+c}{b'+c'}.$$

La formule fondamentale de la trigonométrie rectiligne donne

$$1 + \cos A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b'+c')^2 - a'^2}{2b'c'}, \quad \text{car} \quad A = A';$$

d'où l'on tire

$$\frac{bc}{b'c'} = \frac{p(p-a).}{p'(p'-p')} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

Ainsi

$$\frac{(b+c)}{(b'+c')^2} = \frac{bc}{b'c'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{4bc}{4b'c'}.$$

Il en résulte

$$(2) \qquad \frac{(b-c)^2}{(b'-c')^2} = \frac{a^2}{a'^2} \quad \text{et} \quad \frac{b-c}{b'-c'} = \frac{a}{a'}.$$

En comparant les relations (1) et (2), on obtient

$$\frac{a}{a'} = \frac{b+c}{b'+c'} = \frac{b-c}{b'-c'},$$

d'où

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

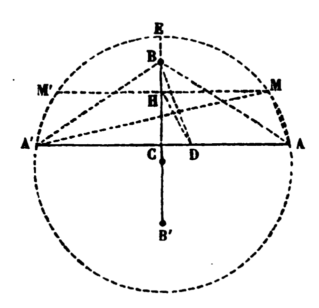
C. Q. F. D.

MM. Emile Daruty (de l'île Maurice), Laquières et Fénéon (élèves du lycée Saint-Louis) ont donné des solutions trigonométriques semblables; mais MM. Laquières et Fénéon ont aussi donné une démonstration géométrique fondée sur la considération des cercles ex-inscrits.

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE).

On donne les deux axes AA′, BB′ *d'une ellipse; construire deux diamètres conjugués qui forment un angle donné* α.

Sur le grand axe A′A je décris un segment A′EA capable de l'angle α supposé obtus et moindre que l'angle



A′BA. De l'une des extrémités B du petit axe BB′, je mène la droite BD qui fasse avec A′A un angle BDA égal à α, et du point D la droite DH faisant avec DA un angle HDA égal à A′BA. Puis je conduis par le point H une parallèle M′HM au grand axe A′A; les extrémités M′ et M de la corde M′M seront des points d'intersection de l'arc A′EA et de l'ellipse qui serait construite sur les axes donnés A′A, B′B.

En menant par le centre C de l'ellipse des diamètres parallèles aux cordes supplémentaires A′M, AM, ils satisferont aux conditions du problème proposé. Il est clair que le point M′ donne lieu à une seconde solution.

G.

SOLUTION DE LA QUESTION 421 (HERMITE)

(voir p. 31);

PAR M. L. RASSICOD,
Élève du lycée Saint-Louis.

Pour que l'équation

$$(1) \qquad ax + by = n,$$

où a, b, n sont des nombres entiers positifs, admette des solutions entières et positives, il faut :

1°. Que a et b soient premiers entre eux (*);

2°. Que n soit plus grand que a et b. Car pour que les valeurs de x et de y

$$x = \frac{n - by}{a}, \quad y = \frac{n - ax}{b}$$

tirées de l'équation (1) soient positives, il faut que y soit $< \frac{n}{b}$ et $x < \frac{n}{a}$; mais x et y devant être entiers ne sauraient être plus petits qu'une fraction; donc il faut que n soit $> a$ et $> b$.

Si ces conditions sont réalisées, l'équation donnée admettra toujours un système de valeurs ($x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$) entières et positives qui la vérifieront. Toutes les solutions seront d'ailleurs comprises dans ces formules

$$x = a - bq, \quad y = \mathrm{B} + aq \; (^{**}).$$

Pour que ces valeurs soient positives, il faut que l'on ait

$$\frac{-\mathrm{B}}{a} < q < \frac{\mathrm{A}}{b},$$

(*) BERTRAND, *Analyse indéterminée du premier degré.*

(**) BERTRAND, *Analyse indéterminée du premier degré.*

c'est-à dire, en vertu de l'identité $aA + bB = n$,

$$(2) \qquad \frac{-B}{a} < q < \frac{-B}{a} + \frac{n}{ab}.$$

Si donc on désigne par p le nombre des entiers contenus dans $\frac{n}{ab}$, les $p+1$ valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ p$$

que l'on donnera à q satisferont à l'inégalité (2), et, par conséquent, donneront pour l'équation (1) $p+1$ solutions [dont fera partie la solution (A, B) donnée pour $q=0$] évidemment distinctes et de plus entières et positives. Toute autre valeur attribuée à q ne satifaisant pas à l'inégalité (2) ne pourra donner pour l'équation proposée un système de solutions entières et positives.

Le nombre de ces solutions est donc en général marqué par le plus grand nombre d'entiers contenu dans $\frac{n}{ab}$ plus un. Je dis en général, car si n était $< a$ et $< b$, il n'y aurait pas de solution entière et positive, c'est-à-dire que le nombre de ces solutions serait précisément égal à p qui serait alors nul.

Note du Rédacteur. Ce résultat est aussi consigné dans l'*Algèbre* de MM. Mayer et Choquet; dans le *Quarterly Journal* (mars, 1855, p. 370), M. Hermite donne cette nouvelle démonstration :

Désignons par $E\left(\frac{n}{p}\right)$ le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{p}$.

On doit évidemment avoir

$$x = E\left(\frac{n}{a}\right) - x', \quad y = E\left(\frac{n}{b}\right) - y',$$

où x' et y' sont des entiers positifs ; substituant ces valeurs, on obtient

$$ax' + by' = n - \alpha - \beta = n',$$

où

$$\alpha = n - a\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right),$$

$$\beta = n - b\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right).$$

On a

$$\alpha < a \quad \text{et} \quad \beta < b$$

et

$$\alpha + \beta < n, \quad n' < \text{o}, \quad n' < n, \quad n' > a, \quad n' > b.$$

Ces inégalités doivent subsister pour qu'une solution soit possible. Faisant donc

$$x' = \left(\frac{\mathrm{E}}{n'}\right) - x'', \quad y' = \left(\frac{\mathrm{E}}{n'}\right) - y'',$$

on obtient

$$ax'' + by'' = n' - \alpha' - \beta' = n'',$$

où

$$\alpha' = n' - a\,\mathrm{E}\left(\frac{n'}{a}\right),$$

$$\beta' = n' - b\,\mathrm{E}\left(\frac{n'}{a}\right);$$

et les inégalités analogues à celles de ci-dessus.

Répétant les mêmes opérations, on a, pour l'équation de quantième i,

$$x^i = \left(\frac{\mathrm{E}}{n^i}\right) - x^{i+1}, \quad y^i = \left(\frac{\mathrm{E}}{n^i}\right) - y^{i+1},$$

$$n^i - a\,\mathrm{E}\left(\frac{n^i}{a}\right) = \alpha^i, \quad n^i - b\,\mathrm{E}\left(\frac{n^i}{a}\right) = b^i,$$

$$n^i - \alpha^i - \beta^i = n^{i+1},$$

et de là

$$ax^{i+1} + by^{i+1} = n^{i+1}.$$

Les n diminuant, le nombre des transformations est limité et elles s'arrêtent lorsqu'on a

$$n^i = n^{i+1} \quad \text{ou} \quad \alpha^i + \beta^i = 0;$$

ce qui donne

$$\alpha^i = 0, \quad \beta^i = 0,$$

$$n^i = a\,\mathrm{E}\left(\frac{n^i}{a}\right) = b\,\mathrm{E}\left(\frac{n^i}{b}\right).$$

Mais a et b étant premiers entre eux, on a donc

$$n^i = \omega ab,$$

ω est un nombre entier; ainsi on obtient une transformée

$$ax^i + by^i = \omega ab,$$

d'où

$$x^i = b\xi, \quad y^i = a\eta, \quad \omega = \eta + \xi;$$

le nombre des solutions de cette dernière équation est $\omega + 1$.

Faisons

$$n = \pi ab + v \quad \text{ou} \quad v < ab;$$

faisant les transformations sous cette forme, on voit que le nombre des solutions de l'équation

$$ax + by = \pi ab + v$$

est égal à la somme des nombres de solutions des équations

$$ax + by = \pi ab \quad \text{et} \quad ax + by = v.$$

Si cette dernière équation est impossible, alors le nombre des solutions est π; si elle est possible, le nombre des solutions est $\pi + 1$.

En faisant les substitutions successives, on parvient

aux séries

$$x = \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n'}{a}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n''}{a}\right) + \ldots + (-1)^{i-1}\mathrm{E}\left(\frac{n^{i-1}}{a}\right)$$
$$+ (-1)^i b\xi,$$

$$y = \mathrm{E}\left(\frac{n}{b}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n'}{b}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n''}{b}\right) + \ldots + (-1)^{i-1}\mathrm{E}\left(\frac{n^{i-1}}{b}\right)$$
$$+ (-1)^i b\eta;$$

$$\xi + \eta = \pi.$$

M. Sylvester a trouvé le nombre des solutions positives entières de l'équation générale $ax + by + cz \ldots = n$; ce travail, à ce que je sache, n'est pas encore publié.

DISCUSSION DES LIGNES ET SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir t. XV, p. 322 et 386; t. XVI, p. 207 et 294);

Par M. PAINVIN,
Professeur, Docteur ès Sciences mathématiques.

I.

LIGNES DU SECOND ORDRE.

La discussion des courbes du second ordre, c'est-à-dire la connaissance du genre et de l'espèce de la courbe représentée par une équation du second degré, se déduit très-facilement de la considération des signes de l'*invariant* et du *déterminant*.

Soit, en adoptant la notation ordinaire,

$$(1) \qquad \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

l'équation générale des courbes du second degré; on pourra toujours supposer $\mathrm{A} > 0$.

Je rends homogène l'équation (1), ce qui donne

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi(x, y, z) \\ = Ax^2 + Cy^2 + Fz^2 + 2Bxy + 2Dxz + 2Eyz = 0, \end{cases}$$

et j'égale à zéro les dérivées du premier membre de l'équation par rapport aux trois variables x, y, z; on obtient ainsi

$$Ax + By + Dz = 0,$$
$$Bx + Cy + Ez = 0,$$
$$Dx + Ey + Fz = 0.$$

Le déterminant des coefficients du système de ces trois équations est ce qu'on appelle le *discriminant* de la fonction φ; le rôle que joue cette quantité dans la question actuelle justifie pleinement cette dénomination.

On aura donc, en désignant par Δ le discriminant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Je considère en outre le déterminant du second ordre

(Invariant.) $$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad (*)$$

qui peut s'écrire immédiatement d'après l'inspection du discriminant, et qui n'est autre chose que le dénominateur commun des coordonnées du centre : on lui donne le nom d'*invariant*.

Or, par une analyse très-simple que je supprime ici, on arrive aux conséquences suivantes :

(*) $\delta = \Delta'_F$; l'accent désigne une dérivée par rapport à la lettre F.

Ier CAS. — *Invariant positif*; genre *ellipse*.

Discriminant	négatif....	Ellipse réelle.
	nul.......	Point.
	positif ...	Ellipse imaginaire.

IIe CAS. — *Invariant négatif*; genre *hyperbole*.

Discriminant	différent de zéro.	Hyperbole.
	nul...........	Deux droites qui se coupent.

IIIe CAS. — *Invariant nul*; genre *parabole*.

Discriminant	différ. de zéro.	Parabole.	
	nul.........	Deux dr. parall.	réelles, si $d < 0$,
			se confond^t^, si $d = 0$,
			imaginaires, si $d > 0$.

d représente un troisième déterminant auxiliaire

$$\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}$$

qui se déduit immédiatement du discriminant en prenant les quatre lettres aux sommets du carré.

II.

SURFACES DU SECOND ORDRE.

Je fais reposer sur des considérations analogues la discussion des surfaces du second degré.

Soit

$$\begin{aligned} & A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy \\ & + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + D = 0 \end{aligned}$$

l'équation générale des surfaces du second ordre, qui, rendue homogène, devient

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Dt^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt = 0.$$

En égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de cette dernière équation par rapport aux variables x, y, z, t, on obtiendra les quatre équations

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z + Ct &= 0, \\ B''x + A'y + Bz + C't &= 0, \\ B'x + By + A''z + C''t &= 0, \\ Cx + C'y + C''z + Dt &= 0. \end{aligned}$$

A est toujours supposé positif.

Le déterminant de ce système est le *discriminant* de la fonction φ.

On aura donc, en désignant par Δ ce discriminant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}$$

Je considérerai en outre les deux déterminants du troisième ordre :

$$(1^{\text{er}} \text{ invar.}) \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \qquad \delta' = \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} \quad (*)$$

et les deux déterminants du second ordre :

$$(2^{\text{e}} \text{ invar.}) \quad d = \begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} \qquad d' = \begin{vmatrix} A & C \\ C & D \end{vmatrix}$$

(*) $\delta = \Delta'_{D}$, $\delta' = \Delta'_{A''}$, $d = \delta'_{A''} = \Delta''_{DA''}$, $d' = \Delta''_{A''A'}$.

Tm.

Ces quatre déterminants peuvent s'écrire à la seule inspection du discriminant, comme il est indiqué par les lignes ponctuées. Je donnerai aux déterminants δ et d les noms de *premier* et *second* invariant; le premier invariant est le dénominateur commun des coordonnées du centre.

Ceci posé, la discussion générale des surfaces du second ordre pourra se résumer de la manière suivante.

J'ai supprimé toute démonstration, pensant que les méthodes de discussion connues étaient bien suffisantes pour établir facilement les propositions énoncées dans cette note; j'ajouterai cependant que la décomposition en carrés est la méthode qui m'a semblé conduire le plus rapidement à ces résultats, si on la dirige convenablement en faisant intervenir quelques propriétés simples des déterminants.

1°. — PREMIER INVARIANT δ DIFFÉRENT DE ZÉRO.

1re FAMILLE. — Surfaces à centre unique.

Ier CAS. — *Les deux invariants δ et* d *tous deux positifs*; genre *ellipsoïde*.

Discriminant	négatif...	Ellipsoïde réel.
	nul......	Point.
	positif...	Ellipsoïde imaginaire.

IIe CAS. — *Le premier invariant δ étant différent de zéro et n'étant pas positif en même temps que le second invariant* d; genre *hyperboloïde*.

Discriminant	positif...	Hyperboloïde à une nappe.
	négatif...	Hyperboloïde à deux nappes.
	nul.....	Cône.

d peut être quelconque, positif, négatif ou nul.

2°. — PREMIER INVARIANT δ NUL.

2ᵉ FAMILLE. — Surfaces dénuées de centres ou possédant une infinité de centres.

Iᵉʳ CAS. — *Le premier invariant δ nul et le discriminant Δ différent de zéro;* genre *paraboloïde.*

SECOND INVARIANT *d différent de zéro :*

Discriminant	négatif...	Paraboloïde elliptique.
	positif...	Paraboloïde hyperbolique.

SECOND INVARIANT *d nul :*

Discriminant positif ou négatif.. Cylindre parabolique.

IIᵉ CAS. — *Le premier invariant δ et le discriminant Δ étant nuls;* genre *cylindrique.*

SECOND INVARIANT *d différent de zéro.*

$d > 0$,	$\delta' > 0$...	Cylindre elliptique imaginaire.
$d > 0$,	$\delta' < 0$...	Cylindre elliptique.
$d < 0$,	$\delta' \gtrless 0$....	Cylindre hyperbolique.
$d > 0$,	$\delta' = 0$...	Deux plans imaginaires qui se coupent.
$d < 0$,	$\delta' = 0$...	Deux plans qui se coupent.

SECOND INVARIANT *d nul.*

$d' > 0$....	Deux plans parallèles imaginaires.
$d' = 0$....	Deux plans qui se confondent.
$d' < 0$....	Deux plans parallèles.

Dégageant cette discussion des cas particuliers, on pourra résumer ainsi les signes caractéristiques des différents genres de surfaces.

Genre ellipsoïde. Les deux invariants δ et d sont tous deux *positifs*; d ne doit pas être nul.

Genre hyperboloïde. Le premier invariant δ est différent de zéro et n'est pas positif en même temps que le second invariant d, qui d'ailleurs peut être quelconque.

Genre paraboloïde. Le premier invariant δ est nul et le discriminant Δ est différent de zéro.

Genre cylindrique. Le premier invariant et le discriminant sont tous deux nuls.

Note du Rédacteur. C'est sans doute pour ne pas trop s'éloigner des usages ordinaires que le savant auteur n'a pas employé la notation si expressive, si mnémonique des coefficients et des variables à *indices* :

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$

$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 = 0 \text{ ligne},$$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3$$

$$+ 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{44}x_4^2 = 0 \text{ surface}.$$

EXTRACTION ABRÉGÉE D'UNE RACINE CUBIQUE;

PAR M. ANGELO GENOCCHI,

J'ai eu tout récemment l'occasion de m'occuper de l'extraction abrégée des racines cubiques dans un cours d'algèbre et de géométrie que je suis chargé de faire à l'université de Turin. M. Serret, dans son *Traité d'Arithmétique* (publié en 1852) exige qu'on ait déjà trouvé $n+2$ chiffres de la racine pour en déterminer n par une simple division. On trouve la même proposition dans une traduction italienne de l'*Arithmétique* de M. Bertrand, imprimée à Florence en 1856 avec des additions et des

notes du traducteur. M. Amiot, dans un intéressant article (*Nouvelles Annales,* 1851, p. 254 et 257) semble même exiger qu'on connaisse au moins $n+3$ chiffres. Je me suis rangé à l'opinion de MM. Midy et Finck, qui se contentent de $n+1$ chiffres seulement (*Nouvelles Annales,* 1844, p. 239; 1846, p. 251); mais j'ai précisé avec plus de soin le cas où le quotient de la division n'est plus la valeur approchée à moins d'une unité de la partie restante de la racine.

Je rapporte mon calcul qui est assez simple.

Soient N le nombre dont on cherche la racine cubique; a le nombre formé par les $n+1$ chiffres déjà trouvés à la racine, suivis de n zéros; q le quotient et r le reste de la division de $\mathrm{N}-a^3$ par $3a^3$.

En posant

$$\sqrt[3]{\mathrm{N}} = \mathrm{A} + x,$$

on a

$$\frac{\mathrm{N}-a^3}{3a^2} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} = q + \frac{x}{3a^2},$$

d'où

$$x = q + \frac{r}{3a^2} - \left(\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Comme $r < 3a^2$, on voit que la différence entre x et q sera toujours < 1 tant qu'on aura

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < 1,$$

et que si cette inégalité n'a pas lieu, x sera $< q$. D'ailleurs on a $x < 10^n$ puisque la partie entière de x ne doit contenir que n chiffres. Or si x n'excède pas $10^n - \frac{1}{2}$, on

peut affirmer que l'on aura

$$\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}<1,$$

car $3x$ n'excédera pas

$$3.10^n-\frac{3}{2}<3.10^n-1,$$

et, à cause de

$$a \geqq 10^{2n}, \quad x<10^n,$$

on aura

$$\frac{3x}{a}+\frac{x^2}{a^2}<\frac{3.10^n-1}{10^{2n}}+\frac{1}{10^{2n}},$$

d'où

$$\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}<\frac{x}{10^n}<1.$$

Mais si q ne surpasse pas 10^n lorsque x excédera $10^n-\frac{1}{2}$, la différence $q-x$ sera toujours <1. Il faut donc qu'on ait

$$q>10^n.$$

Or le reste $\frac{N-a^3}{10^{3n}}$ ne peut surpasser $3\left(\frac{a}{10^n}\right)^2+3\left(\frac{a}{10^n}\right)$, et, par conséquent, la fraction $\frac{N-a^3}{3a^2}$ ne peut pas surpasser $10^n+\frac{10^{2n}}{a}$; d'où il s'ensuit que q sera toujours $<10^n+1$, excepté dans le cas de $a=10^{2n}$. Dans ce cas

$$q=10^n+1, \quad r=0,$$
$$N=10^{3n}.[(10^n+1)^3-1].$$

Voici le cas *unique* où q étant $=10^n+1$, $x>10^n-\frac{1}{2}$,

on aura

$$q - x > 1,$$

et, par suite, $a + q$ ne sera plus une valeur approchée de $\sqrt[3]{N}$ à moins d'une unité. Mais, dans ce cas, x étant compris entre $10^n - \frac{1}{2}$ et 10^n, $a + q - 1$ sera la racine approchée *à moins d'une demi-unité* par excès, et $a + q - 2$ la racine approchée *à moins d'une unité* par défaut. Ainsi la racine approchée se déduit toujours du quotient q; elle résulte donc toujours d'une simple division.

Au reste le cas singulier de $q - x > 1$ est assez reconnaissable soit par la forme de N, soit parce qu'alors q surpasse le plus petit nombre entier de $n + 1$ chiffres, tandis qu'on n'a besoin que de n chiffres.

Je crois donc qu'on peut prononcer sans exception que $n + 1$ chiffres de la racine suffisent pour déterminer les suivants par une simple division.

Note du Rédacteur. M. Housel m'écrit que la méthode abrégée donnée à la page 7 est déjà exposée dans les *Calculs pratiques* qu'il a publiés avec M. Babinet, et il ne met pas en doute que M. Forestier n'y soit parvenu de son côté.

QUESTIONS.

(COMMUNIQUÉES PAR M. VANNSON.)

429. Si par le centre d'un polygone sphérique régulier on fait passer une circonférence de grand cercle et qu'on projette sur cette circonférence tous les arcs menés du centre aux divers sommets, la somme des tangentes carrées des projections est constante, quelle que soit la direc-

tion du grand cercle. Elle est égale à la tangente carrée de la distance polaire du cercle multipliée par la moitié du nombre des côtés du polygone.

430. Si au lieu des carrés on prend une puissanee quelconque de degré pair et inférieur aù nombre des côtés du polygone, on trouve pour somme

$$S_{2p} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots 2p}{1.2.3\ldots p} \cdot \frac{\text{N} \operatorname{tang}^2 r}{2^{2p}},$$

N étant le nombre des côtés. Les théorèmes analogues ont lieu pour un polygone régulier dans un plan.

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir page 99);

Par M. VANNSON.

Nous avons démontré que l'équation d'une circonférence de grand cercle sur la sphère est

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1 \quad \text{ou} \quad y = \text{A}x + b$$

et que celle d'un petit cercle ayant son pôle à l'origine est

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta = \text{R}^2,$$

les lettres x, y, a, etc., représentant des tangentes. Ces équations étant les mêmes que celles de la ligne droite et du cercle sur le plan, il en résulte qu'on a immédiatement la solution de tout problème dans lequel n'entre qu'un seul petit cercle et un nombre quelconque de grands cercles. Si le problème analogue a été résolu sur le plan

par l'analyse, il suffit de prendre le résultat du calcul et de l'appliquer à la sphère en considérant certaines lettres comme des tangentes d'arcs; les applications qu'on peut faire de cette méthode sont en très-grand nombre, nous nous bornerons à quelques exemples.

1°. *Trouver l'intersection d'un petit cercle et d'un grand cercle.*

Il serait inutile de faire ici le calcul; on trouve, pour condition de possibilité,

$$R^2 > \frac{b^2 \sin^2 \theta}{1 + A^2 + 2A\cos\theta}.$$

Le grand cercle ayant pour équation

$$y = Ax + b,$$

pour que les deux courbes soient tangentes, il faut qu'on ait

$$R = \pm \frac{b \sin \theta}{\sqrt{1 + A^2 + 2A\cos\theta}},$$

et comme alors le rayon égale la distance du pôle du petit cercle à l'arc tangent, il en résulte que cette formule fait connaître par sa tangente la distance de l'origine à une circonférence de grand cercle; si les axes sont rectangles, la condition de contact sera

$$b = \pm R\sqrt{1 + A^2};$$

en sorte que l'équation d'une circonférence de grand cercle tangente à un petit peut s'écrire ainsi

$$y = Ax \pm R\sqrt{1 + A^2}.$$

Cette formule résout le problème de mener une tangente à un cercle de manière que les tangentes des seg-

ments interceptés sur les côtés d'un angle droit ayant son sommet au pôle soient dans un rapport donné $(-A)$. Il y a deux solutions : si l'on cherche la rencontre des deux circonférences,

$$y = Ax \pm R\sqrt{1 + A^2}.$$

On voit qu'il ne peut y avoir pour x et y de valeurs finies communes aux deux équations; il faut donc que $x = \infty$, c'est-à-dire que la rencontre a lieu à 90 degrés du pôle. Pour achever de trouver le point de rencontre, il faut avoir sa latitude.

Soit Y la tangente de cette latitude, on aura

$$y = \frac{Y}{\cos x}.$$

Les équations des deux arcs tangents peuvent donc s'écrire ainsi

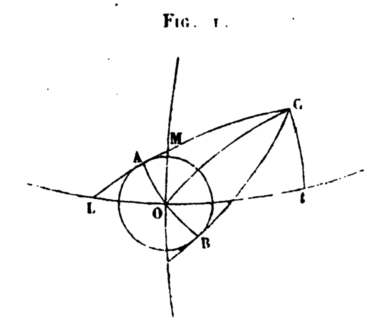
$$Y = A \sin x + R\sqrt{1 + A^2} \cos x,$$
$$Y = A \sin x - R\sqrt{1 + A^2} \cos x,$$

d'où

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad Y = A.$$

En effet, la distance CO étant un quadrant, l'angle

Fig. 1.



$COA = \frac{\pi}{2}$, la latitude $Ct =$ l'angle $COt = \frac{\pi}{2} - AOL$, et on a évidemment

$$\cot AOL = \frac{\text{tang}\, MO}{\text{tang}\, LO} = -\frac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, a} = A.$$

Si l'on appelle x' et y' les tangentes des coordonnées du point de contact, on trouvera, au moyen des résultats précédents, que la tangente peut encore se représenter par l'équation

$$yy' + xx' = R^2.$$

On pourra se proposer de mener une tangente au cercle par un point extérieur, trouver l'équation de la corde de contact ou plus généralement la polaire d'un point $x''y''$, ce sera

$$yy'' + xx'' = r^2.$$

De là on conclura aisément les propriétés des polaires, les mêmes que sur un plan.

Problème. *Connaissant les coordonnées géographiques de deux points, trouver leur distance* Δ.

Soient xy, $x'y'$ les longitudes et latitudes des deux points donnés; Δ sera le troisième côté d'un triangle dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, ce qui donne

$$\cos\Delta = \sin y \sin y' + \cos y \cos y' \cos(x - x').$$

Si l'on introduit les tangentes et qu'on développe $\cos(x - x')$, on a

$$\cos\Delta = \frac{\text{tang}\, y\ \text{tang}\, y' + \cos x \cos x' + \sin x \sin x'}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 y}\ \sqrt{1 + \text{tang}^2 y'}},$$

si l'on remplace la latitude y par l'ordonnée géométrique, il faudra à $\text{tang}^2 y$ substituer $Y^2 \cos^2 x$ (Y étant la tangente

de l'ordonnée géométrique) ou $\frac{Y^2}{1+X^2}$ (X étant la tangente de l'abscisse ou longitude). On trouve ainsi

$$\cos\Delta = \frac{YY'+XX'+1}{\sqrt{1+X^2+Y^2}\sqrt{1+X_1^2+Y_1^2}},$$

de là on tire

$$\operatorname{tang}^2\Delta = \frac{(Y-Y_1)^2+(X-X')^2+(YX'-Y'X)^2}{(1+XX'+YY_1)^2}.$$

Si dans cette expression on regarde Δ comme constant et X, Y comme variables, on aura l'équation d'une circonférence de cercle en fonction des coordonnées de son pôle et de sa distance polaire Δ.

Si $\Delta = 90$ degrés, l'équation devient

$$YY'+XX'+1=0;$$

c'est l'équation d'une circonférence de grand cercle (déjà trouvée plus haut).

Quand deux points sont distants de 90 degrés, le cosinus de leur distance est nul, et on a entre leurs coordonnées la relation

$$y''y'+x''x'+1=0.$$

Quand deux circonférences de grands cercles se coupent à angle droit, leurs pôles sont distants l'un de l'autre de 90 degrés, la relation précédente a donc lieu entre les coordonnées de leurs pôles. Si les circonférences sont représentées par les équations

$$Ax+By=C,\quad A'x+B'y=C',$$

la relation précédente devient

$$AA'+BB'+CC'=0.$$

Enfin si les circonférences sont représentées par les deux

équations

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{6}=1, \quad \frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{6'}=1,$$

la relation exprimant qu'elles se coupent à angle droit sera

$$\frac{1}{\alpha\alpha'}+\frac{1}{66'}+1=0.$$

Si donc on demandait l'équation d'une circonférence passant par un point (x', y') et perpendiculaire à une autre représentée par

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{6}=1,$$

on aura pour calculer α' et $6'$ la relation

$$\frac{1}{\alpha\alpha'}+\frac{1}{66'}+1=0,$$

et, de plus,

$$\frac{x'}{\alpha'}+\frac{y'}{6'}=1.$$

Ce qui donne pour équation de la circonférence perpendiculaire à une autre

$$y-y'=\frac{\alpha(1+6y')}{6(1+\alpha x')}(x-x').$$

Si les coordonnées du pôle de la circonférence donnée sont x'' et y'', comme il suffit de joindre le point donné à ce pôle, l'équation du cercle perpendiculaire sera

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x').$$

Pour calculer la distance d'un point à une circonférence de grand cercle, il suffit de prendre le complément de la distance entre son pôle et le point donné. Si donc

la circonférence est représentée par

$$my + nx + p = 0,$$

et qu'on appelle Δ la distance cherchée, on aura

$$\sin\Delta = \frac{my' + nx' + p}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}}.$$

L'angle de deux circonférences de grands cercles peut se mesurer par la distance de leurs pôles. Si donc les deux circonférences ont pour équations

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

et que V représente leur angle, on aura

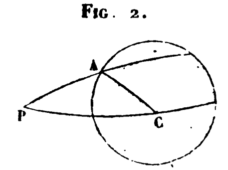
$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Théorème des sécantes.

L'équation d'une circonférence peut se mettre sous une autre forme plus commode dans certains cas.

En effet, on peut déterminer la position d'un point A par sa distance ρ à un point fixe P et par l'angle ω que

Fig. 2.



fait PA avec un axe PC que nous supposerons mené par le pôle C du cercle. Nous aurons dans le triangle APC, en posant $PC = \alpha$ et $AC = r$,

$$\cos r = \cos\rho\cos\alpha + \sin\rho\sin\alpha\cos\omega.$$

Si nous regardons ρ comme inconnue, nous résoudrons aisément l'équation en posant

$$\cos\rho = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin\rho = \frac{2t}{1 + t^2},$$

t désignant tang $\frac{\omega}{2}$; notre équation devient ainsi

(1) $(\cos r + \cos\alpha)t^2 - 2t\sin\alpha\cos\omega + \cos r - \cos\alpha = 0.$

Le produit des racines est égal à

$$\frac{\cos r - \cos\alpha}{\cos r + \cos\alpha} = \text{tang}\left(\frac{r + \alpha}{2}\right)\text{tang}\left(\frac{\alpha - r}{2}\right).$$

Ainsi quand d'un point P on mène une sécante à un cercle, le produit des tangentes des demi-arcs compris entre le point P et la circonférence est constant, il est égal au carré de la tangente de la moitié de l'arc tangentiel mené du point P, si ce point est extérieur au cercle, et, dans le cas contraire, il est égal à la tangente carrée du quart de la corde minima passant par ce point.

Si par le point P on mène un grand cercle perpendiculaire à PA, pour avoir son intersection avec le cercle C, il suffira dans l'équation (1) de remplacer $\cos\omega$ par $-\sin\omega$; si l'on cherche ensuite la somme des carrés des quatre racines dans les deux équations, on trouve

$$S = \frac{4\sin^2 r}{(\cos r + \cos\alpha)^2},$$

quantité indépendante de ω. Ce qui démontre un théorème connu sur deux sécantes rectangulaires. On peut vérifier la formule en faisant

$$r = \infty, \quad \alpha = 0.$$

Ce n'est là toutefois qu'un cas particulier d'un théorème plus général auquel on parvient en augmentant successi-

vement ω de $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$ jusqu'à $\frac{2(n-1)\pi}{n}$, et, en prenant la demi-somme des carrés des racines dans toutes les équations obtenues, on trouve

$$\int = \frac{n \sin^2 r}{(\cos r + \cos \alpha)^2}.$$

Ce résultat, indépendant de ω, démontre le théorème suivant :

Si l'on divise la surface d'une sphère en n *fuseaux égaux, nous supposons* n *pair, par autant de grands cercles menés d'un même point* P, *si ensuite on les coupe par un cercle grand ou petit de rayon constant et ayant son pôle à une distance fixe du point* P, *la somme des carrés des tangentes des demi-arcs interceptés entre le point* P *et chaque point d'intersection sera constante, quelle que soit la position du cercle sécant.*

Le théorème analogue sur un plan s'énoncerait ainsi :

Si l'on construit un polygone régulier d'un nombre pair de côtés, qu'on joigne son centre P *à tous les sommets* A, B, etc., *puis qu'on trace un cercle quelconque* C *dans le plan du polygone, la somme des carrés des segments compris entre le centre* P *et les points d'intersection des rayons* PA, PB *avec le cercle* C *est constante et égale au carré du rayon pris autant de fois qu'il y a de côtés dans le polygone; si le cercle* C *ne coupe pas tous les rayons* PA, PB, etc., *ou si même il n'en coupe aucun, le théorème a également lieu en substituant aux segments les binômes imaginaires que donne la résolution des équations.*

Dans le théorème sur la sphère, si l'on suppose que le cercle sécant soit un grand cercle, on aura

$$\cos r = 0$$

et alors

$$S = \text{séc}^2 \alpha.$$

Remarque. Le théorème a également lieu pour des puissances quelconques d'un degré pair inférieur au nombre des côtés du polygone, c'est-à-dire que la somme des puissances de degré $2n$ des tangentes des demi-arcs est constante, quel que soit α.

Intersection de deux cercles, axes radicaux.

L'équation trouvée pour un cercle quelconque peut s'écrire ainsi

$$\sqrt{1 + x^2 + y^2} = m'(yy' + xx' + 1),$$

m' représentant $\dfrac{1}{\cos r_1 \sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}}$, m' peut être positif ou négatif; l'équation d'un second cercle sera de même

$$\sqrt{1 + x^2 + y^2} = m''(yy'' + xx'' + 1).$$

Si on les retranche membre à membre, on trouve

$$y(m'y' - m''y'') + x(m'x' - m''x'') + m' - m'' = 0.$$

C'est l'équation d'un grand cercle. Elle sera vérifiée par les coordonnées des points d'intersection des deux cercles donnés, si l'on suppose qu'ils se coupent, et, dans le cas contraire, elle sera vérifiée par les racines imaginaires communes aux équations des deux cercles. Ce grand cercle s'appelle l'*axe radical des cercles donnés*.

Si, étant donnés trois cercles, on prend les trois équations de leurs axes radicaux en les combinant deux à deux et qu'on les ajoute membre à membre, on trouve une identité; donc les trois axes radicaux concourent au même point.

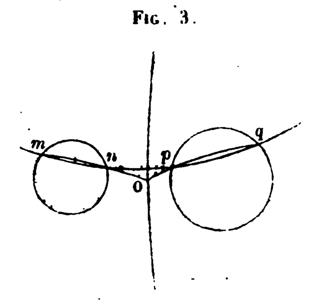
Si l'on se reporte à la condition pour que deux grands

se coupent à angle droit, on reconnaîtra que l'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à l'arc qui joint leurs pôles.

Ainsi pour construire l'axe radical de deux cercles qui ne se rencontrent pas, on les coupera par un cercle auxiliaire coupant le premier aux points A et B, et le deuxième en deux points C et D; on tracera les arcs AB et CD; soit O leur point de rencontre: il suffira d'abaisser de O une perpendiculaire sur l'arc qui joint les pôles des cercles donnés pour avoir leur axe radical.

Définition. Si d'un point O on mène un arc de grand cercle coupant un petit cercle C aux points M et N, le produit $\tang \frac{OM}{2} \tang \frac{ON}{2}$ se nomme puissance du point O par rapport au cercle C. Cela posé, on peut dire que l'axe radical de deux cercles est le lieu des points d'égale puissance par rapport aux deux cercles. En effet, menons

Fig. 3.



un cercle qui coupe les deux cercles donnés le premier aux points m, n, le deuxième aux points p, q. Traçons les arcs mn et pq. Supposons qu'ils se coupent au point O, ce point O sera un point de l'axe radical des cercles donnés, et on aura

$$\tang \frac{Om}{2} \tang \frac{On}{2} = \tang \frac{Op}{2} \tang \frac{Oq}{2}.$$

Donc le point O, et, en général, tout point appartenant à l'axe radical des cercles donnés est un point d'égale puissance par rapport aux deux cercles. C. Q. F. D.

On peut encore démontrer que si un cercle A coupe deux cercles B et C à angle droit, le cercle A aura son pôle sur l'axe radical des deux autres.

Si les pôles des deux cercles sont sur l'axe des x, l'équation de l'axe radical se réduit à

$$x(m'x' - m''x'') + m' - m'' = 0.$$

Si l'on veut que l'axe radical serve comme axe des y, il faut avoir

$$m' = m''$$

ou

$$\cos r_{,} \sqrt{1 + x'} = r_{,,} \sqrt{1 + x_{,,}^2};$$

si l'on appelle α', α'' les abscisses des deux centres, cette relation devient

$$\frac{\cos r'}{\cos \alpha'} = \frac{\cos r''}{\cos \alpha''}.$$

L'équation d'un des cercles peut alors s'écrire ainsi :

$$xx' + 1 = \frac{\cos r'}{\cos \alpha'} \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Posons

$$\frac{\cos r'}{\cos \alpha'} = h,$$

nous aurons

$$xx' + 1 = h\sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Si nous donnons à x' deux valeurs arbitraires en laissant h constant, nous aurons les équations de deux cercles ayant pour axe radical l'axe des y. Cette manière de représenter les équations de deux cercles peut servir dans quelques problèmes ou théorèmes.

Ier Exemple. Si pour un point de l'axe radical de

deux cercles on détermine sa polaire relativement à chacun d'eux, ces deux polaires se coupent sur l'axe radical. (Nous supprimons la démonstration qui est très-simple.)

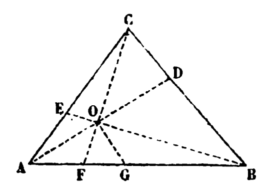
IIe Exemple. Étant donnés deux cercles, si l'on mène une circonférence de grand cercle perpendiculaire à la ligne des centres, et que pour chacun de ses points on trace la polaire relativement à chaque cercle, le lieu des intersections de ces polaires sera une circonférence de grand cercle symétrique de la première par rapport à l'axe radical.

La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 371

(voir t. XVI).

Déterminer sur le plan d'un triangle ABC *(et dans l'intérieur du triangle) un point* O *tel, qu'en multipliant chaque distance de ce point à un sommet par le sinus de l'angle formé par les deux distances aux deux autres sommets, la somme des trois produits soit un maximum. Démontrer que le centre du cercle inscrit remplit cette condition.*



La fonction dont il faut déterminer le maximum est

$$AO.\sin BOC + BO.\sin AOC + CO.\sin AOB.$$

Pour déterminer ce maximum, il suffira d'établir le lemme suivant :

Si par l'un des sommets d'un triangle AOB *on mène une droite* OF *qui divise en deux parties quelconques l'angle* AOB *formé par les deux côtés* OA, OB, *et qu'on multiplie respectivement chacun de ces côtés par le sinus de l'angle que l'autre côté forme avec la ligne de division* OF, *le maximum de la somme*

$$AO.\sin BOF + BO.\sin AOF$$

de ces deux produits sera le troisième côté AB *du triangle.*

Pour démontrer cette proposition, je mène une droite OG qui fasse avec OA l'angle AOG = BOF, il en résultera BOG = AOF.

Les triangles AOG, BOG donnent

$$AO.\sin AOG = AG.\sin OGA$$

et

$$BO.\sin BOG = BG.\sin OGB = BG.\sin OGA.$$

Ajoutant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$AO.\sin AOG + BO.\sin BOG = AB.\sin OGA,$$

d'où

$$AO.\sin BOF + BO.\sin AOF = AB.\sin OGA.$$

Cette dernière relation montre que la somme

$$AO.\sin BOF + BO.\sin AOF$$

est en général moindre que AB. Pour qu'elle devienne égale à AB, il faut que l'angle OGA soit droit, et dans ce cas les angles BOF, AOF sont les compléments des angles OAB, OBA adjacents au troisième côté AB du triangle.

Il est maintenant facile de trouver le maximum de la fonction

$$AO.\sin BOC + BO.\sin AOC + CO.\sin AOB.$$

En effet, désignons par OF, OE, OD les prolongements

des droites CO, BO, AO, on aura

$$\sin BOC = \sin BOF, \quad \sin AOC = \sin AOF,$$

d'où

$$AO.\sin BOC + BO.\sin AOC = AO.\sin BOF + BO.\sin AOF.$$

Mais on vient de voir que AO sin BOF + BO sin AOF ne peut jamais surpasser AB; donc on aura en général

$$(1) \qquad AO.\sin BOC + BO.\sin AOC < AB;$$

et de même

$$(2) \qquad BO.\sin AOC + CO.\sin AOB < BC,$$

$$(3) \qquad CO.\sin AOB + AO.\sin BOC < AC.$$

Additionnant et divisant par 2, il vient

$$AO.\sin BOC + BO.\sin AOC + CO.\sin AOB < \frac{AB + BC + AC}{2}.$$

Ainsi, la somme des trois produits dont il s'agit est généralement plus petite que le demi-périmètre du triangle ABC; pour qu'elle soit égale à ce demi-périmètre, il faut que les premiers membres des inégalités (1), (2), (3) deviennent égaux aux seconds membres AB, BC, AC.

Or, pour qu'on ait

$$AO.\sin BOC + BO.\sin AOC = AB,$$

il faut, comme on l'a vu précédemment, que l'angle AOF soit le complément de OBA. De même, l'égalité

$$BO.\sin AOC + CO.\sin AOB = BC$$

exige que l'angle COD soit le complément de OBC. Mais les angles AOF, COD sont égaux comme opposés au sommet; donc leurs compléments OBA, OBC seront aussi égaux entre eux, c'est-à-dire que la ligne BO sera la bissectrice de l'angle ABC.

On prouvera de même que CO doit être la bissectrice de l'angle BCA si l'on suppose à la fois

$$\mathrm{BO}.\sin \mathrm{AOC} + \mathrm{CO}.\sin \mathrm{AOB} = \mathrm{BC}$$

et

$$\mathrm{CO}.\sin \mathrm{AOB} + \mathrm{AO}.\sin \mathrm{BOC} = \mathrm{AC}.$$

D'où l'on peut conclure que le maximum de la somme

$$\mathrm{AO}.\sin \mathrm{BOC} + \mathrm{BO}\ \sin \mathrm{AOC} + \mathrm{CO}.\sin \mathrm{AOB}$$

s'obtient en faisant coïncider le point O avec le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, et que la valeur de ce maximum est le demi-périmètre du triangle. G.

Note. Dans le t. VII, n° 10, du *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, M. Peters (*) établit par le calcul des probabilités que la station de la planchette est déterminée avec la plus grande sécurité lorsqu'elle est placée dans le centre du cercle inscrit dans le triangle formé par les trois objets pris pour auxiliaires dans le problème dit de Pothenot; cela donne lieu au problème que M. Gerono vient de résoudre d'une manière très-simple. M. le professeur Richelot en a donné une solution *euristique* et fondée sur le calcul différentiel (*Astr. Nachr.*, n° 998, t. XLII, p. 217, 1855). Tm.

(*) Le célèbre directeur de l'observatoire d'Altona.

SOLUTION DE LA QUESTION 392 (PROUHET)

(voir t. XVI, p. 311);

PAR MM. H. VIELLARD ET M. LAQUIÈRE,
Élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie),

ET M. L. DE COINCY,
Élève du lycée Bonaparte.

Soit $2m$ le degré de l'équation.

Le polynôme $f(x)$ étant un produit de facteurs du second degré de la forme

$$[(x-a)(x-2s+a)],$$

sa dérivée sera la somme de produits de facteurs du second degré de cette forme, produits multipliés respectivement par la dérivée de celui de ces facteurs du second degré qui n'entre pas dans le produit.

Cette dérivée étant pour tous les facteurs

$$2(x-s),$$

on aura

$$(a)\qquad f'(x)=2(x-s)\,\mathrm{F}(x),$$

$\mathrm{F}(x)$ étant la somme de tous les produits $(m-1)$ à $(m-1)$ des facteurs du second degré de la forme ci-dessus qui entrent dans le polynôme $f(x)$.

1°. De (a) résulte d'abord que s est racine de

$$f'(x)=0.$$

2°. Les facteurs de la forme énoncée

$$[(x-a)(x-2s+a)]$$

donnent le même résultat par la substitution de k ou de

$2s - k$ à la place de x, puisque ce résultat est

$$u = (k - a)(k - 2s + a),$$

ou bien

$$v = (2s - k - a)(a - k) = u.$$

Ainsi le polynôme $F(x)$ donnera les mêmes résultats par ces deux substitutions. Si donc k est racine de $f'(x) = 0$ et, par conséquent, de $F(x) = 0$, $2s - k$ le sera aussi.

3°. La dérivée $f'(x)$ est de degré $(2m - 1)$, et l'on a

$$\frac{1}{2}f'(x) = (x - s)\,F(x) = \varphi(x),$$

$F(x)$ étant un polynôme de même forme que $f(x)$, c'est-à-dire qu'il est un produit de $m - 1$ facteurs de la forme

$$[(x - a')(x - 2s + a')].$$

Le polynôme $\varphi(x)$ est donc un polynôme de degré impair ayant une racine égale à s et dont les autres racines se partagent en couples de somme commune $2s$. Cela posé,

$$\varphi'(x) = Fx + (x - s)\,F'(x).$$

Or, d'après la démonstration ci-dessus,

$$F'(x) = 2(x - s)\,F_2(x),$$

$F_2(x)$ étant d'après la démonstration précédente de la forme $F(x)$, c'est-à-dire produit de facteurs du second degré en nombre $2(m - 2)$ et de la forme

$$[(x - b)(x - 2s + b)].$$

Or

$$\varphi'(x) = F(x) + 2(x - s)(x - s)\,F_2(x).$$

En appliquant encore à $\varphi'(x)$ la même démonstration que ci-dessus à $F(x)$, on prouverait que si $\varphi'(x)$ a la racine l, il a aussi la racine $2s - l$. C. Q. F. D.

Ainsi

$$(\alpha) \qquad f(x),\quad f''(x),\ldots,\quad f^{2n}(x),$$

sont de même forme

$$(\beta) \qquad f'(x),\quad f'''(x),\ldots,\quad f^{2n+1}(x)$$

ont la racine s.

Les autres racines des polynômes (β) et celles des polynômes (α) se partagent en groupes de somme $2s$ (*).

PROPOSITIONS DIVERSES SUR L'HYPERBOLOIDE A UNE NAPPE. Construction d'une surface du quatrième ordre passant par huit points;

Par M. POUDRA.

1°. Par trois droites de l'espace, on peut faire passer un hyperboloïde à une nappe et on n'en peut faire passer qu'un seul.

2°. Par deux droites et trois points de l'espace, on peut faire passer un hyperboloïde et on peut n'en faire passer qu'un seul.

3°. Par une droite et six points de l'espace, on peut faire passer un hyperboloïde et on n'en peut faire passer qu'un seul.

4°. Par trois droites dont l'une s'appuie sur les deux autres et par deux points de l'espace, on peut faire passer un hyperboloïde et on n'en peut faire passer qu'un seul.

5°. Par quatre droites dont deux s'appuient sur les deux autres et par un point de l'espace, on peut faire

(*) MM. Marquet, candidat à l'École Normale supérieure, et Chanson ont envoyé des solutions de la question 422.

passer un hyperboloïde et on n'en peut faire passer qu'un seul.

6°. Deux hyperboloïdes se coupent généralement suivant une courbe du quatrième ordre.

7°. Deux hyperboloïdes ayant une génératrice commune se coupent suivant une courbe du troisième ordre ayant cette génératrice pour asymptote.

8°. Deux hyperboloïdes ayant deux génératrices communes se coupent suivant deux autres droites qui sont toutes deux réelles ou toutes les deux imaginaires. En effet, tout plan sécant donne lieu à deux sections coniques qui ont généralement quatre points d'intersection; à chacun de ces points correspond une génératrice commune.

9°. Quatre points *a*, *b*, *c*, *d* de l'espace donnent lieu aux trois quadrilatères gauches *abcd*, *abdc*, *adbc*. Un cinquième point *e* détermine donc (5) trois hyperboloïdes qui, deux à deux, ayant deux génératrices communes, se couperont encore suivant deux autres droites.

10°. Cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* déterminent quinze hyperboloïdes qui deux à deux ont quatre droites communes.

Considérons un quadrilatère *abcd* formé par les deux droites *ab*, *cd* et les deux droites *ad*, *bc* qui s'appuient sur les deux premières. Soit un cinquième point *c* variable. A chaque position de ce point *e* correspondra un seul hyperboloïde, de sorte que pour diverses positions de ce point, nous aurons divers hyperboloïdes; nous appellerons *faisceau* d'hyperboloïdes cette série de surfaces ayant pour *base* commune le quadrilatère *abcd*. Si l'on coupe ce faisceau d'hyperboloïdes par un plan, on obtiendra un *faisceau* de coniques passant par les quatre points communs où ce plan coupe les quatre génératrices communes *ab*, *cd*, *ad*, *bc*. Ce faisceau de coniques a pour fonction anhar-

monique le rapport anharmonique des tangentes à quatre de ces courbes en un point quelconque de leur intersection. Ce rapport anharmonique sera égal à celui des quatre plans passant par ces quatre tangentes et par la génératrice commune qui passe par ce point. Il en résulte que le rapport anharmonique des quatre tangentes sera le même que celui des quatre plans tangents en ce point. Ce rapport sera le même quel que soit le plan sécant; nous l'appellerons ainsi la *fonction anharmonique* du faisceau d'hyperboloïdes (*).

Soient trois hyperboloïdes passant par les deux droites communes *ab*, *cd* et successivement par les trois points e_1, e_2, e_3. Le plan E passant par les trois points coupera les trois hyperboloïdes suivant trois coniques passant par les points d'intersection du plan avec les deux droites *ab*, *cd* et deux autres génératrices (9).

Soient encore trois autres hyperboloïdes passant successivement par les trois mêmes points et par deux droites communes $a'b'$, $c'd'$. Le plan E les coupera aussi suivant trois coniques.

Imaginons deux systèmes de coniques homographiques relativement aux trois premières coniques et aux trois secondes coniques. Ces deux systèmes se couperont, d'après un théorème connu, suivant une courbe du quatrième degré passant par onze points connus : 1° les trois positions primitives e_1, e_2, e_3, et 2° les huit points où le plan E coupe les huit génératrices *ab*, *dc*, *ad*, *bc*, $a'b'$, $d'c'$, $a'd'$, $b'c'$, et chaque point de cette courbe sera une position du point *e* par lequel passent deux génératrices de deux hyperboloïdes homologues.

Tout autre plan sécant donnera lieu de même à deux faisceaux homographiques de coniques, l'un ayant pour

(*) *Voir* t. XII, p. 361. TM.

base les quatre points d'intersection de ce plan avec les quatre génératrices ab, cd, ad, bc, et l'autre par les quatre points résultant de l'intersection de ce même plan avec les quatre génératrices $a'b'$, $c'd'$, $a'd'$, $b'c'$. Mais ensuite chaque position du point e dans le plan E donne lieu à deux génératrices qui, coupées par le nouveau plan, donneront deux points dont l'un appartiendra à une conique d'un faisceau et l'autre à la conique homologue dans l'autre. La courbe d'intersection de ces deux faisceaux sera donc généralement une courbe du quatrième ordre.

A chaque conique correspond un hyperboloïde. On a donc aussi deux faisceaux homographiques d'hyperboloïdes.

L'intersection des deux faisceaux homographiques d'hyperboloïdes sera une surface du quatrième ordre, laquelle semble intéressante à étudier.

1°. Par son intersection avec un plan quelconque, elle peut donner lieu à une très-grande variété de courbes planes du quatrième ordre.

2°. Cette surface passe par les huit droites ab, cd, ad, bc, $a'b'$, $c'd$, $a'd'$, $b'c'$.

3°. Si le plan sécant passe par une des huit arêtes ci-dessus, la section sera une courbe du troisième ordre et l'arête ci-dessus en sera une asymptote.

4°. Si le plan sécant passe par deux génératrices telles que ab, bc qui se rencontrent en b, ce plan sera d'abord un plan tangent à la surface en ce point, et la courbe d'intersection sera une section conique. Il y aura donc huit plans qui donneront des sections coniques.

5°. Tout plan sécant parallèle à une des arêtes donnera une courbe du quatrième ordre ayant deux points à l'infini dans la direction de l'arête.

6°. Si le plan sécant est parallèle à deux arêtes, la courbe aura donc quatre points à l'infini.

7°. Si les huit points d'intersection du plan E et des huit génératrices étaient sur une même conique ainsi que les points e_1, e_2, e_3, alors la surface du quatrième ordre se changerait en deux hyperboloïdes.

TABLEAU

Des divers cas que présente le problème où il s'agit de déterminer immédiatement les axes d'une section conique connue seulement par certaines conditions sans décrire la courbe;

Par M. POUDRA.

Désignation des données.

1°. a, b, c, d, e des points de la courbe; 2°. A, B, C, D, E des tangentes à la courbe aux points respectifs a, b, c, d, e; 3°. O le centre de la courbe; 4°. F, F_1 les foyers; 5°. M, M_1 les longueurs de deux diamètres conjugués; 6°. α l'angle de ces deux diamètres conjugués; 7°. h, h_1 les extrémités du grand axe et i, i_1 celles du petit.

J'ai résolu tous les cas suivants :

Données.	Données.
1°. a, b, c, d, e.	11°. a, b, C, d, D.
2°. a, b, c, d, E.	12°. A, B, C, d, D.
3°. a, b, c, D, E.	13°. F, a, b, c.
4°. a, b, C, D, E.	14°. F, a, b, C.
5°. a, B, C, D, E.	15°. F, a, B, C.
6°. A, B, C, D, E.	16°. F, A, B, C.
7°. a, b, c, B, C.	17°. F, a, b, B.
8°. A, b, c, B, C.	18°. F, A, b, B.
9°. a, b, c, d, D.	19°. O, M, M_1, α.
10°. a, B, C, d, D.	20°. O, a, M, α.

Données.	Données.
21°. O, A, M, α.	28°. O, a, B, C.
22°. O, a, b, α.	29°. O, A, B, C.
23°. O, a, B, α.	30°. O, a, b, B.
24°. O, A, B, α.	31°. O, A, b, B.
25°. O, a, A, α.	32°. O, F, a.
26°. O, a, b, c.	33°. O, F, A.
27°. O, a, b, C.	

Il me reste à résoudre :

34°. h, a, b, c.	40°. h, F, a.
35°. h, a, b, C.	41°. h, F, A.
36°. h, a, B, C.	42°. h, O, a.
37°. h, A, B, C.	43°. h, O, A.
38°. h, b, B, c.	44°. h, i, a.
39°. h, A, b, B.	45°. h, i, A.

Note. On est disposé à donner ces solutions aux lecteurs qui les demanderont.

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir p. 140);

PAR M. VANNSON.

Transformation des coordonnées.

1°. Prendre pour nouvelle origine un point donné sur l'axe des x en laissant les axes rectangulaires.

Soient a l'abscisse de la nouvelle origine et

$$\varphi(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe donnée; si nous y introduisons les

coordonnées géographiques sans changer l'origine, l'équation devient

$$\varphi\left(x,\ \frac{y}{\cos x_1}\right)=0,$$

x_1 étant l'abscisse dont x était la tangente. Remplaçons maintenant x_1 par x_1+a, l'équation deviendra

$$\varphi\left[\tang(x_1+a),\ \frac{y}{\cos(x_1+a)}\right]=0.$$

Pour revenir maintenant aux coordonnées géométriques après le changement d'origine, il suffit de multiplier y par $\cos x_1$; l'équation demandée sera donc

$$\varphi\left[\tang(x_1+a),\ \frac{y\cos x_1}{\cos(x_1+a)}\right]=0.$$

Si nous développons $\tang(x_1+a)$ et $\cos(x_1+a)$, nous aurons, en posant

$$\alpha=\tang a \quad \text{et} \quad X=\tang x,$$

l'équation plus simple

$$\varphi\left[\frac{X+\alpha}{1-\alpha X},\ \frac{y}{\cos a(1-\alpha X)}\right]=0.$$

Nous allons appliquer cette méthode à la recherche du centre dans les courbes du deuxième degré dont l'équation générale est

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

Remarquons d'abord que si l'on trouve sur la surface de la sphère un point O tel, que deux arcs menés de ce point et terminés de part et d'autre à la rencontre de la courbe soient divisés au point O en deux parties égales, tout autre arc mené par le point O sera divisé de la même manière, donc le point O sera le centre de la courbe.

En effet, prenons ces deux arcs pour axes et O pour origine; en faisant $y = o$, on devra trouver deux racines égales et de signe contraire, d'où

$$E = o;$$

on aura de même

$$D = o:$$

d'où l'on voit aisément que tout autre arc mené du point O et inscrit à la courbe aura son milieu au point O; O est donc le centre. Soient a et b les coordonnées de ce point O rapporté aux axes primitifs, α et β les tangentes des arcs a et b; portons l'origine au point de l'axe des x qui a pour abscisse a, l'équation transformée sera

$$\frac{Ay^2}{\cos^2 a} + \frac{By(\alpha + X)}{\cos a} + C(\alpha + X)^2 + \frac{Dy(1 - \alpha X)}{\cos a}$$
$$+ E(\alpha + X)(1 - \alpha X) + F(1 - \alpha X)^2 = o.$$

Concevons maintenant qu'on ait mené par le point cherché un arc perpendiculaire à l'axe nouveau des y, l'équation de cet arc sera

$$y = 6 \cos \alpha$$

(y et β sont des tangentes); on aura alors une équation du deuxième degré en X; donc les racines seront égales et de signe contraire, ce qui donne la condition

(1) $$Bb + 2C\alpha + E = \alpha(D6 + E\alpha + 2F);$$

on trouve de même

(2) $$B\alpha + 2Ab + D = 6(D6 + E\alpha + 2F).$$

Ces équations sont celles qu'on trouve dans la recherche des plans principaux des surfaces du second degré. Pour nous rendre compte de cette similitude, cherchons l'équation de la surface particulière pour laquelle la recherche

des plans principaux conduirait identiquement aux équations (1) et (2). On trouve aisément

$$Ay^2 + Cx^2 + Bxy + Dyz + Exz + Fz^2 = 0.$$

C'est un cône ayant son sommet à l'origine.

Si l'on cherche l'intersection de cette surface avec la sphère en employant les coordonnées sphériques, on trouve la courbe proposée.

Il reste à faire voir que la ligne de l'espace ayant pour coefficients de direction α, β, est perpendiculaire à un des plans principaux. En effet, si nous joignons le centre de notre conique sphérique au centre de la sphère par une droite, cette droite aura pour équations

$$x = \alpha z, \quad y = \beta z,$$

et comme elle est l'intersection de deux plans principaux du cône, elle est bien perpendiculaire au troisième, ce qu'on voulait faire voir.

Il suit de là que l'élimination de α dans les équations (1) et (2) conduira à une équation du troisième degré ayant ses trois racines réelles. Notre courbe a donc trois centres, et, d'après ce qu'on vient de voir, ils sont placés aux trois sommets d'un triangle trirectangle. On voit aussi que si l'on construit ce triangle, chacun de ses côtés partagera la courbe en parties symétriques et sera, par conséquent, un axe de cette courbe.

Remarque. Si, au lieu de transporter l'origine en un point de l'axe des x, on la transportait à la distance β sur l'axe des y, on aurait

$$x = x' \frac{\cos y'}{\cos(y' + \beta)}.$$

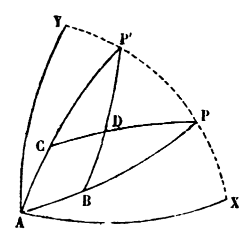
Second cas. Pour changer d'axes sans déplacer l'origine, on peut employer la considération des projections

centrales. On peut aussi, comme nous allons le faire voir, se servir d'un procédé identique à celui qu'on emploie sur un plan.

Définition. Nous appellerons rhombe sphérique un quadrilatère ABCD dans lequel les côtés opposés AB, CD et les deux autres AC et BD se coupent à 90 degrés du sommet A en P et P'.

THÉORÈME. *Si par le sommet* A *d'un rhombe sphérique* (*) *on mène un arc de grand cercle, la tangente de la projection de la diagonale* AD *sur cet arc égale la somme des tangentes des projections des deux côtés* AB *et* AC.

FIG. 1.



Soient x', y' les tangentes des coordonnées de B et x'', y'' les tangentes des coordonnées de C. L'arc PBC aura pour équation

$$y - y'' = \frac{y'}{x'}(x - x''),$$

et l'arc P' DB aura pour équation

$$y - y' = \frac{y''}{x''}(x - x'').$$

(*) Le terme *parallélogramme*, que nous évitons à dessein, a déjà été employé pour désigner un quadrilatère dont les diagonales se coupent en parties égales.

On tire de là pour le point D

$$X = x' + x''.$$

C. Q. F. D.

Si l'on menait par le point A un autre arc AE et qu'on construisît un nouveau rhombe avec AD diagonale du premier et AE comme côtés, la tangente de la projection de la nouvelle diagonale égalerait la somme des tangentes des projections des arcs AB, AC, AE, et ainsi de suite pour un nombre quelconque d'arcs.

Cela posé, soient OX et OY deux axes faisant entre eux l'angle θ, soient α l'angle du nouvel axe des x avec l'ancien et α' l'angle du nouvel axe des y avec OX; si nous traçons les arcs projetants d'un point m dans les deux systèmes, om sera la diagonale commune à deux rhombes. Si donc nous la projetons sur un arc perpendiculaire à l'axe OY, nous aurons, par le théorème précédent,

$$\text{tang proj. A}m = x \sin\theta,$$

et cette même tangente égale

$$x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha'),$$

d'où

$$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}.$$

On trouve de même

$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\theta}.$$

Les formules relatives aux divers cas particuliers se déduisent de là comme sur un plan.

Simplification de l'équation générale des courbes sphériques du second degré.

Nous avons indiqué plus haut le moyen de trouver les

coordonnées du centre (C) ; pour y transporter l'origine, on commencera par faire tourner l'axe des x jusqu'à ce qu'il passe au centre en laissant les axes rectangulaires; l'angle α aura pour tangente $\frac{y'}{x'}$, y' et x' désignant les tangentes des coordonnées du centre; puis on transportera l'origine sur le nouvel axe des x au point C, la distance a des deux origines étant donnée par la formule

$$\text{tang}\, a = \sqrt{y_1^2 + x_1^2}.$$

Quand on applique au cas du cercle, la première transformation doit faire disparaître la première puissance de y et le rectangle des variables par raison de symétrie, la seconde fait disparaître x, et on trouve pour équation transformée

$$y^2 + x^2 = \frac{B^2(D^2 + E^2) + 2EDBF}{DE(DE - 2BF)}.$$

Ce second membre représente évidemment le carré de la tangente de la distance polaire du cercle donné. On peut en déduire

$$\cos^2 r = \frac{DE(DE - 2BF)}{D^2E^2 + B^2D^2 + B^2E^2}.$$

(Borgnet.)

Si l'on pose

$$\text{tang}^2 r = \rho^2,$$

l'équation prendra la forme

$$y^2 + x^2 = \rho^2.$$

Pour une courbe quelconque du deuxième degré, après avoir porté l'origine au centre, on pourra faire disparaître le rectangle des variables et calculer les nouveaux coefficients par les mêmes formules que dans les courbes planes; l'équation de la courbe sera alors

$$Ay^2 + Cx^2 = F;$$

si nous supposons A et C positifs, F devra l'être, et si l'on pose

$$\frac{F}{C}=a^2, \quad \frac{F}{A}=b^2,$$

on la mettra sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Si A et C sont de signes contraires, on la mettra de même sous la forme

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\pm 1.$$

(Borgnet.)

Mais, dans ce second cas, on peut ramener l'équation à la première forme en transportant l'origine sur l'axe des x à 90 degrés de l'origine actuelle, si on a -1 dans le deuxième membre, et en opérant de même pour l'axe des y s'il y a $+1$. Pour cela, appelant x' et y' les coordonnées anciennes, et X', Y' les nouvelles, on posera, comme on l'a vu plus haut,

$$x'=X'+\frac{\pi}{2}$$

et

$$\operatorname{tang} y'=\frac{\operatorname{tang} Y' \cos x'}{\cos\left(x_1+\frac{\pi}{2}\right)},$$

ce qui conduira à l'équation

$$\frac{\operatorname{tang}^2 Y'}{b_1^2}+\frac{X^2}{a_1^2}=1,$$

en posant

$$b_1^2=\frac{b^2}{a^2}$$

et

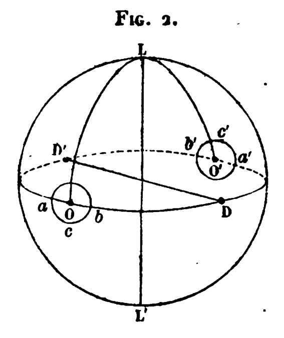
$$\frac{1}{a^2} = a_1^2,$$

ou, plus simplement,

$$(1) \qquad \frac{Y^2}{b_1^2} + \frac{X^2}{a_1^2} = 1,$$

en représentant tang Y' par Y. On voit donc qu'il n'y a en réalité qu'une seule courbe sphérique représentée par

Fig. 2.



l'équation générale du deuxième degré : on la nomme *ellipse sphérique*. Comme on peut ajouter π à un arc sans changer sa tangente, il s'ensuit que l'équation (1) représente deux courbes égales abc, $a'b'c'$; si l'origine est au point O ou O', on a l'équation (1); si elle est au point D à égale distance de O et de O' sur l'axe des X, on a l'équation

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1,$$

et D, D' seront deux nouveaux centres; enfin, si l'on porte l'origine sur l'axe des y au point L ou L' à égale distance de O et de O', l'équation prendra la forme

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

et les points L, L′ seront deux nouveaux centres. Nous trouvons donc six centres ; si le calcul n'a donné que trois solutions, c'est parce que deux points diamétralement opposés ont les mêmes coordonnées. On reconnaît aussi que ces trois points sont placés aux sommets d'un triangle trirectangle. (BORGNET.)

PROBLÈME.

Trouver le lieu géométrique des centres des sections faites dans un cône du second ordre par une suite de plans passant tous ou par un même point ou par une même droite;

PAR MM. MARQUET ET DALICAN,
Candidats à l'École Normale supérieure.

PREMIÈRE PARTIE.

Voici la méthode générale qu'il faut suivre dans le premier cas :

Soient

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface du deuxième degré;

$$M = 0$$

l'équation générale du plan passant par le point donné; cette équation renferme deux paramètres arbitraires. Entre ces deux équations, on éliminera une des trois variables, z par exemple, on aura ainsi une équation entre x et y,

$$f(x, y) = 0,$$

équation de la projection de la courbe d'intersection sur le plan. Les coordonnées du centre de cette courbe seront

déterminées par les équations

$$f'_x(x, y,) = 0,$$
$$f'_y(x, y,) = 0,$$

entre ces deux dernières équations et l'équation

$$M = 0,$$

on éliminera les deux paramètres arbitraires, et on aura une seule équation en x, y et z qui sera celle du lieu cherché. On voit donc de suite que le lieu cherché est une surface.

Appliquons cette méthode au cône.

Supposons, pour plus de simplicité, que le sommet du cône soit à l'origine, et que son équation soit

$$(1) \qquad Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0.$$

Il faut au moins qu'un des trois coefficients soit négatif.

Soient (x', y', z') les coordonnées du point donné; l'équation générale du plan sécant est

$$(2) \qquad a(x - x') + b(y - y') - (z - z') = 0.$$

Portant la valeur de z dans l'équation (1), on obtient l'équation

$$\left.\begin{array}{l} (P - a^2P'')x^2 + (P' - b^2P'')y^2 - 2ab\,P''xy \\ + 2P''(ax' + by' + z')ax + 2P''(ax' + by' + z')by \\ - P''(ax' + by' + z')^2 \end{array}\right\} = 0,$$

qui, jointe à l'équation (2), représente la courbe d'intersection. Les équations qui déterminent le centre sont

$$(3) \qquad a^2(x - x') - ab(y - y') + az' + \frac{P}{P''}x = 0,$$

$$(4) \qquad b^2(y - y') - ab(x - x') + bz' + \frac{P'}{P''}y = 0.$$

Eliminant a et b entre les trois équations (2), (3), (4), on obtient

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 - Px'x - P'y'y + P''z'z = 0.$$

Le lieu cherché est donc une surface du second degré
Les coordonnées du centre sont

$$x = \frac{x'}{2}, \quad y = \frac{y'}{2}, \quad z = \frac{z'}{2},$$

ce qui indique que ce point est le milieu de la droite qui joint le point donné au sommet du cône.

Si l'on prend le centre pour origine, on obtient

$$4(Px^2 + P'y^2 - P''z^2) = Px'^2 + P'y'^2 - P''z'^2,$$

l'on a un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes selon que le second membre est positif ou négatif; l'hyperboloïde et le cône ont un élément rectiligne commun et passant par le centre.

SECONDE PARTIE.

Dans le cas où le plan sécant passe par une droite donnée, la méthode générale est la suivante :

Soient

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface du deuxième degré;

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q$$

les équations de la droite donnée; l'équation générale des plans passant par cette droite est

$$x - az - p = \lambda(y - bz - q).$$

Entre cette équation et celle de la surface, on éliminera

une des variables, x par exemple, on aura une équation

$$f(y, z) = 0$$

qui représentera, conjointement avec l'équation du plan, la courbe d'intersection. Entre les équations

$$f'_y(y, z) = 0,$$
$$f'_z(y, z) = 0$$

du centre de la courbe et l'équation du plan, on éliminera l'indéterminée λ, on aura un système de deux équations en x, y, z qui seront les équations du lieu; donc le lieu sera une courbe.

Application au cône.

Soit donc

(1) $$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0$$

l'équation du cône. Eliminant x entre cette question et celle du plan variable, il vient

(2) $$\left\{\begin{array}{c}(az+p)^2+\lambda^2(y-bz-q)^2+2\lambda(az+p)(y-bz-q)\\ +\frac{P'}{P}y^2-\frac{P''}{P}z^2\end{array}\right\} = 0.$$

Les coordonnées du centre sont données par les équations

(3) $$\lambda^2(y-bz-q)+\lambda(az+p)+\frac{P'}{P}y = 0,$$

(4) $$\left\{\begin{array}{l}\lambda^2 b(y-bz-q)-\lambda[a(y-bz-q)-b(az+p)]\\ \qquad -a(az+p)+\frac{P''}{P}z = 0;\end{array}\right.$$

d'où l'on tire

(5) $$\lambda a(y-bz-q)+a(az+p)+\frac{P'}{P}by-\frac{P''}{P}z = 0.$$

Eliminant successivement λ entre l'équation du plan variable et l'équation (5), on obtient

$$(6)\qquad (x - az - p)x + \frac{P'}{P}(y - bz - q)y = 0,$$

$$(7)\qquad aPx + bP'y - P''z = 0.$$

Ce sont les équations de l'intersection d'une surface du second ordre par un plan; ainsi le lieu cherché est une conique plane.

Remarque. Il resterait maintenant, pour compléter la question, à examiner ce que devient le lieu dans les cas particuliers où la droite passerait par le sommet du cône, serait une génératrice, etc., mais l'étude de ces cas particuliers n'offre rien de remarquable.

Note du Rédacteur. La théorie des polaires réciproques (principe de dualité) donne ce théorème :

Soient donnés : 1° un cône du second degré; 2° un point fixe; 3° un plan fixe. Par le point on mène un plan quelconque qui coupe le cône suivant une conique, et le plan fixe suivant une droite; le lieu du pôle de cette droite relativement à la conique est un hyperboloïde dont le centre est dans le plan fixe.

Les deux propriétés énoncées ci-dessus pour le cône subsistent pour une surface quelconque du second degré; c'est d'une évidence intuitive pour la sphère; et par les procédés métamorphiques on passe de la sphère aux autres surfaces ; toutefois une démonstration générale directe est à désirer.

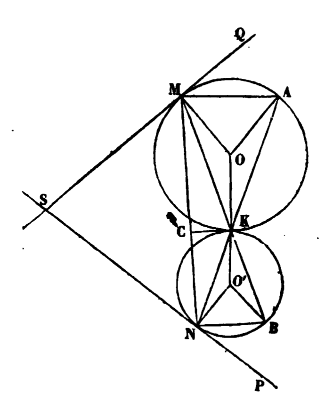
Lorsque la droite se transporte à l'infini, on a des sections parallèles. Cette propriété est dans tous les traités élémentaires.

SOLUTION DE LA QUESTION 428 (VANNSON)

(voir p. 45);

PAR M. ABEL DE BOISCHEVALLIER,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

Soient O, O′ deux cercles se touchant extérieurement et satisfaisant aux trois conditions énoncées. Les triangles



isocèles MKO, BKO′ étant équiangles, MO et BO′ sont parallèles ; de même OA est parallèle à O′N, et l'on a

$$\mathrm{MOA} = \mathrm{NO'B} = \mathrm{QSP}$$

(angles de même espèce dont les côtés sont perpendiculaires). Dans le triangle isocèle O′NB, l'angle à la base est le complément de la moitié de l'angle QSP; il en résulte

$$\mathrm{BNP} = \frac{\mathrm{QSP}}{2}.$$

Donc NB est parallèle à la bissectrice de l'angle QSP; pareillement MA est parallèle à cette bissectrice.

Si par le point K on mène KC parallèle à la bissectrice de QSP, on a

$$\frac{MC}{CN}=\frac{MK}{BK}=\frac{OK}{O'K}=\frac{a}{b}.$$

C s'obtient en divisant MN en deux segments dont le rapport est $\frac{a}{b}$, et le point K se trouve sur la parallèle menée par le point C à la bissectrice de QSP.

En outre

$$NKM = 2^d - NKB = 2^d - \frac{QSP}{2};$$

donc en décrivant sur MN un segment capable de l'angle $2^d - \frac{QSP}{2}$, on a un second lieu du point de contact des deux cercles.

Construction. On joint les deux points donnés, sur la droite tracée on décrit un segment de cercle capable du supplément de la moitié de l'angle des deux droites; on partage la droite qui limite les points donnés sur les deux droites en deux segments additifs proportionnels aux nombres donnés a, b. Par le point ainsi obtenu, on mène une parallèle à la bissectrice, et son intersection avec la circonférence détermine le point de contact des deux cercles. En joignant les points donnés à cette intersection et prolongeant jusqu'à la rencontre des parallèles à la bissectrice menée par ces mêmes points, on forme deux triangles inscrits dans les cercles cherchés.

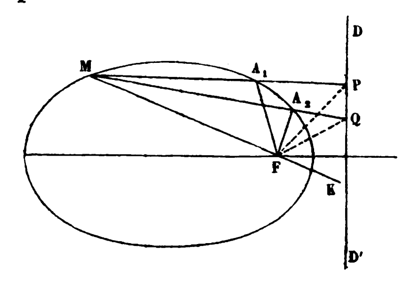
SOLUTION DE LA QUESTION 413

(voir p. 81);

PAR MM. CORMET ET G. LEGRANDAIS,
Élèves du lycée Louis-le-Grand.

Soient F et D le foyer et la directrice correspondante d'une conique; A_1, A_2, deux points fixes sur la conique et M un point variable aussi sur la conique; les droites MA_1, MA_2 rencontrent respectivement la directrice aux points P et Q, la distance PQ est vue du foyer F sous un angle constant, quelle que soit la position du point M sur la conique. (FAURE.)

Cette question se résout très-facilement en s'appuyant sur cette propriété si connue des courbes du second degré :



Soit une sécante quelconque MA_1, F un foyer, DD′ la directrice correspondante, la ligne FP qui joint le foyer F au point P où la sécante coupe la directrice est bissectrice de l'angle A_1FK extérieur au triangle MA_1F.

De même FQ est bissectrice de l'angle A_2FK.

Mais

$$PFQ = PFK - QFK = \frac{A_1FK}{2} - \frac{A_2FK}{2} = \frac{A_1FA_2}{2};$$

donc l'angle PFQ est constant et égal à la moitié de A_1FA_2.

C. Q. F. D.

Note. M. Aignant fait la remarque que lorsque la droite $A_1 A_2$ passe par le foyer, l'angle constant est droit.

MM. Carenou, Laquières, Feneon, élèves du lycée Saint-Louis, Bonnet, élève de l'institution Mayer, Aignant, élève du lycée de Douai (classe de M. David), et Chanson, élève du lycée de Versailles, ont résolu la même question.

M. A. James, maître répétiteur au lycée de Versailles, applique le même raisonnement à l'ellipse sphérique.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 413

(voir p. 179);

PAR M. BERGIS,
Élève du lycée Charlemagne (institution Massin).

Soit l'équation de la conique

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos a},$$

et

$$\rho = \frac{-p}{e\cos a}$$

celle de la directrice correspondante au foyer pris pour pôle.

Soient r', α' les coordonnées du point A_1; r'', α'' celles de A_2; ρ', ω' celles du point variable M.

D'après une formule connue, l'équation de MA_1 sera

$$\rho = \frac{\rho' r' \sin(\omega' - \alpha')}{r' \sin(\omega - \alpha') - \rho' \sin(\omega - \omega')}$$

ou

$$\rho = \frac{\rho' r' \sin(\omega' - \alpha')}{(r'\cos\alpha' - \rho'\cos\omega')\sin\alpha + (\rho'\sin\omega' - r'\sin\alpha')\cos\alpha}.$$

La coordonnée angulaire du point d'intersection P de

cette droite avec la directrice sera donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\omega_1 = -\frac{e\rho' r' \sin(\omega'-\alpha') + (\rho'\sin\omega' - r'\sin\alpha')\rho}{(r'\cos\alpha' - \rho'\cos\omega')\rho},$$

ou bien, en exprimant que les points A_1, A_2, M sont sur la conique, on a, réductions faites,

$$\operatorname{tang}\omega_1 = \frac{\sin\alpha' - \sin\omega'}{\cos\alpha' - \cos\omega'}$$

ou

$$\operatorname{tang}\omega_1 = -\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha'+\omega')}.$$

De même MA_2 coupera D en un point Q dont la coordonnée angulaire sera donnée par

$$\operatorname{tang}\omega_2 = -\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha''+\omega'')}.$$

L'angle sous lequel la distance PQ est vue du foyer F est la différence des angles ω_1 et ω_2. La tangente de cet angle sera donc donnée par

$$\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha''+\omega')} - \dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha'+\omega')}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha''+\omega')\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha'+\omega')}}$$

ou

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha'')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\omega')\sin\frac{1}{2}(\alpha''+\omega') + \cos\frac{1}{2}(\alpha'+\omega')\cos\frac{1}{2}(\alpha''+\omega')},$$

ou enfin

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha'-\omega''),$$

quantité constante.

Le théorème est donc démontré.

Note du Rédacteur. M. Richard Oxamendi considère les polaires des points P et Q, elles passent par F et sont respectivement perpendiculaires à PF et QF; les droites PF, la perpendiculaire à PF en F, les droites FA, FM forment un faisceau harmonique: un angle étant droit dans ce faisceau, l'autre est bissecté, etc.

SOLUTION DE LA QUESTION 307

(voir t. XIV, p. 262);

PAR M. CHANSON,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Un dé est un cube portant sur chaque face des trous nommés points. Ses faces opposées sont 1 et 6, 2 et 5, 3 et 4. Les points sont placés de manière que le centre de gravité de chaque face coïncide avec son centre de figure; le centre de gravité du dé n'est pas à son centre de figure. Trouver la distance du centre de gravité à chaque face, en supposant que chaque trou enlève une portion de volume représentée par $\frac{1}{p}$ du volume total, et $p > 21$.

Soient A le cube donné et a son côté. Le volume du dé est

$$a^3\left(1-\frac{21}{p}\right).$$

Or le moment du dé par rapport à une face quelconque, la face qui contient 6 points par exemple, est égal au moment du cube par rapport à la même face, moins la somme des moments des trous.

Si j'appelle x_6 la distance du centre de gravité cherché à la face (6), le moment du dé par rapport à cette face

est

$$a^3\left(1-\frac{21}{p}\right).x;$$

le moment du cube par rapport à la même face est

$$a^3 \cdot \frac{a}{2}.$$

Quant à la somme des moments des trous, je peux l'évaluer en évaluant séparément la somme des moments des trous de chaque face et ajoutant ces sommes.

Or, puisque le centre de gravité de chaque face coïncide avec son centre de figure, j'obtiendrai la somme des moments des trous d'une face quelconque, en multipliant la somme de leurs volumes par la distance à la face (6) du centre de figure de la face considérée. Ainsi donc la somme des moments des trous par rapport à la face (6) sera

$$\frac{a^3}{p}\cdot a+\frac{4.a^3}{p}\cdot\frac{a}{2}+\frac{3.a^3}{p}\cdot\frac{a}{2}+\frac{2.a^3}{p}\cdot\frac{a}{2}+\frac{5a^3}{p}\cdot\frac{a}{2}.$$

J'ai donc l'égalité

$$a^3\left(\frac{p-21}{p}\right)x_6=a^4\left(\frac{p-21-4-3-2-5}{2p}\right),$$

d'où

$$x_6=\frac{a}{2(p-21)}[p-(1+2+3+4+5)-1]$$

ou

$$x_6=\frac{a}{2(p-21)}[(p-21)+6-1].$$

Je vois alors une loi se manifester et j'aurai de même, par analogie, en appelant

$$x_3,\quad x_4,\quad x_3,\quad x_2,\quad x_1$$

les distances du centre de gravité aux faces 5, 4, 3, 2, 1,

$$x_5 = \frac{a}{2(p-21)}[(p-21)+5-2],$$

$$x_4 = \frac{a}{2(p-21)}[(p-21)+4-3],$$

$$x_3 = \frac{a}{2(p-21)}[(p-21)+3-4],$$

$$x_2 = \frac{a}{2(p-21)}[(p-21)+2-5],$$

$$x_1 = \frac{a}{2(p-21)}[(p-21)+1-6].$$

On vérifie du reste immédiatement que la somme des distances à deux faces opposées, c'est-à-dire

$$x_1 + x_6 \quad \text{ou} \quad x_2 + x_5 \quad \text{ou} \quad x_3 + x_4,$$

est égale au côté du cube a.

Nous remarquerons aussi que la face la plus voisine du centre de gravité est la face (1) et que la plus éloignée est la face (6). Cette dernière est donc celle qui aura le plus de *chances* à se présenter au joueur.

Le rapport entre la distance maximum et la distance minimum est

$$\frac{x_6}{x_1} = \frac{p-16}{p-26}.$$

Il est facile de déterminer ce rapport très-approximativement pour un dé donné.

Il n'y aura qu'à mesurer le volume du dé au moyen de la balance hydrostatique, d'abord tel qu'on le donne, ensuite en bouchant les trous avec un mastic imperméable et de manière que la surface de chaque face reste bien plane. La différence entre les deux donnera la somme des volumes des trous; et divisant par 21, on aura le vo-

lume d'un trou dont le rapport au volume du cube total donnera la fraction $\frac{1}{p}$, et par suite le nombre p.

Ayant fait cette opération sur un dé dont le côté était de 15 millimètres, j'ai trouvé que p était égal à 1373.

Cela donne alors pour le rapport considéré :

$$\frac{x_6}{x_1} = \frac{1356}{1346} = \frac{678}{673}.$$

QUESTIONS.

431. ABCDEF est un hexagone inscrit dans une circonférence. Si l'on pose

$$AB = a, \quad CD = b, \quad EF = c,$$
$$DE = a', \quad FA = b', \quad BC = c',$$
$$CF = A, \quad BE = B, \quad AD = C,$$

on aura

$$ABC = aa'A + bb'B + cc'C + abc + a'b'c'.$$

(PROUHET.)

432. Déterminant

$$\begin{vmatrix} 1.2.3.4\ldots & n \\ 2.3.4.5\ldots & n.1 \\ 3.4.5.6\ldots & 2.1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ n-1.n.1.2\ldots & n-2 \\ n.1.2.3\ldots & n-1 \end{vmatrix} = \pm \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

$+$ si n est de la forme $4p$ ou $4p+1$;
$-$ si n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$. (PAINVIN.)

433. Trouver le lieu des centres des cercles inscrits aux

triangles ayant pour sommet l'un des foyers d'une conique et pour base une corde passant par l'autre foyer; le centre est sur la parallèle à l'axe focal menée par le milieu de la corde. (ROUCHÉ.)

434. L'équation

$$c_0 x^n + \frac{n}{1} c_1 x^{n-1} + \frac{n.n-1}{2} c_2 x^{n-2} + \ldots + n_1 c_{n-1} x + c_n = 0$$

a *au moins* autant de racines imaginaires qu'on trouve de variations de signes dans la suite

$$c_0^2,\ c_1^2 - c_0 c_2,\ c_2^2 - c_1 c_3 \ldots,\ c_{n-1}^2 - c_{n-2} c_n,\ c_n^2.$$

(NEWTON.)

Note. La démonstration d'Euler (*Introduction au calcul infinitésimal*) n'est pas satisfaisante.

(GENOCCHI.)

435. Sur les longueurs OA, OB, OC, données dans l'espace, on prend respectivement les points a, b, c; les rapports $\frac{Bb}{Aa}$, $\frac{Cc}{Aa}$ sont donnés. Trouver : 1° l'enveloppe du plan abc; 2° le lieu du centre de gravité du triangle abc.

436. Quelle est l'enveloppe de la droite dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est donnée?

437. O_1 est une circonférence décrite sur un rayon de la circonférence O comme diamètre; on fait rouler O autour de O_1. On demande : 1° le lieu décrit par un point quelconque du plan de O; 2° l'enveloppe d'une droite quelconque liée invariablement à la circonférence O.

(MANNHEIM.)

438. Démontrer que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une circonférence O sur les

tangentes à la *développante* D de cette circonférence est une *spirale* d'Archimède. (MANNHEIM.)

439. On donne le périmètre et l'axe d'une ellipse, calculer l'autre axe soit par une série convergente, soit par des approximations successives.

440. Démontrer l'identité

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{a_n(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n)}$$

$$=\frac{a_1}{a_0(a_0+a_1)}+\frac{a_2}{(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)}$$

$$+\frac{a_3}{(a_0+a_1+a_2)(a_0+a_1+a_2+a_3)}+\ldots$$

$$+\frac{a_n}{(a_0+a_1+\ldots+a_{n-1})(a_0+a_1+\ldots+a_n)}.$$

(WERNER.)

441. Le produit de plusieurs nombres consécutifs ne peut être une puissance parfaite lorsqu'un de ces nombres est premier absolu. (MATHIEU.)

SOLUTIONS DES QUESTIONS 410 ET 411 (PROUHET)

(voir t. XVI, p. 408);

PAR MM. EMILE MATHIEU, LE CAPITAINE FAURE, GROLOUS ET TARDY (Gênes).

Si l'on désigne par D le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \cos n\alpha_0 & \cos(n-1)\alpha_0 & \cos(n-2)\alpha_0 \ldots & \cos 0\,\alpha_0 \\ \cos n\alpha_1 & \cos(n-1)\alpha_1 & \cos(n-2)\alpha_1 \ldots & \cos 0\,\alpha_1 \\ \cos n\alpha_2 & \cos(n-1)\alpha_2 & \cos(n-2)\alpha_2 \ldots & \cos 0\,\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos n\alpha_n & \cos(n-1)\alpha_n & \cos(n-2_n)\alpha_n \ldots & \cos 0\,\alpha_n \end{vmatrix}$$

et par D_1 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos^n \alpha_0 & \cos^{n-1} \alpha_0 & \cos^{n-2} \alpha_0 \dots & \cos^0 \alpha_0 \\ \cos^n \alpha_1 & \cos^{n-1} \alpha_1 & \cos^{n-2} \alpha_1 \dots & \cos^0 \alpha_1 \\ \cos^n \alpha_2 & \cos^{n-1} \alpha_2 & \cos^{n-2} \alpha_2 \dots & \cos^0 \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^n \alpha_n & \cos^{n-1} \alpha_n & \cos^{n-2} \alpha_n \dots & \cos^0 \alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} D_1.$$

En second lieu, si l'on désigne par D_2 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 \dots & \sin \alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 \dots & \sin \alpha_1 \\ \sin(n+1)\alpha_2 & \sin n\alpha_2 \dots & \sin \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n \dots & \sin \alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D_2 = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \dots \sin\alpha_n D_1.$$

Commençons par rappeler la formule

$$(m) \quad \left\{ \begin{aligned} 2^{n-1}\cos^n \alpha_0 = {} & \cos n\alpha_0 + n\cos(n-2)\alpha_0 \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\alpha_0 + \dots \end{aligned} \right.$$

Ensuite aux éléments de la première colonne du déterminant D, ajoutons les éléments des colonnes de rang impair multipliés respectivement par les coefficients du second membre de l'équation (m); puis agissons d'une manière analogue pour les autres colonnes : il est clair que le déterminant D pourra s'écrire de la manière sui-

vante :

$$\begin{vmatrix} 2^{n-1}\cos^n\alpha_0 & 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_0 & 2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha_0\ldots & \cos^0\alpha_0 \\ 2^{n-1}\cos^n\alpha_1 & 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_1 & 2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha_1\ldots & \cos^0\alpha_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2^{n-1}\cos^n\alpha_n & 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_n & 2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha_n\ldots & \cos^0\alpha_n \end{vmatrix}$$

Par conséquent nous aurons

$$D = 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1}\,D_1.$$

ou

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\,D_1.$$

Pour démontrer la formule de la deuxième question, nous rappellerons la formule suivante :

$$\sin(n+1)\alpha_0 = (n+1)\cos^n\alpha_0\sin\alpha_0 - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\cos^{n-2}\alpha_0\sin^3\alpha_0 + \ldots,$$

qui se déduit immédiatement de celle de Moivre. Si nous remplaçons $\sin^2\alpha$, $\sin^4\alpha$, etc., par $1-\cos^2\alpha$, $1-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$, etc., cette formule pourra s'écrire

$$\sin(n+1)\alpha_0 = \sin\alpha_0\left\{\begin{array}{l} \cos^n\alpha_0\left[\begin{array}{l} n+1+\dfrac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} \\ +\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5}+\ldots \end{array}\right] \\ +A\cos^{n-2}\alpha_0+B\cos^{n-4}\alpha_0+\ldots \end{array}\right\}$$

ou

$$\sin(n+1)\alpha_0 = \sin\alpha_0(2^n\cos^n\alpha_0 + A\cos^{n-2}\alpha_0 + B\cos^{n-4}\alpha_0+\ldots).$$

Remplaçons dans le déterminant D_2 les sinus qui y entrent en fonction de $\cos\alpha_0$, et faisons sortir en dehors du déterminant les facteurs $\sin\alpha_0$, $\sin\alpha_1$ etc., communs respectivement aux éléments de la première ligne, de la

deuxième, etc., D_2 deviendra

$$\sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_n$$

$$\times \left| \begin{array}{lll} 2^n\cos^n\alpha_0 + A\cos^{n-2}\alpha_0 + B\cos^{n-4} + \ldots & 2^{n-1}\cos^{n-1}\alpha_0 + A'\cos^{n-2}\alpha_0 + \ldots & \cos \\ 2^n\cos^n\alpha_1 + A\cos^{n-2}\alpha_1 + B\cos^{n-4} + \ldots & 2^{n-1}\cos^{n-1}\alpha_1 + A'\cos^{n-2}\alpha_1 + \ldots & \cos \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 2^n\cos^n\alpha_n + A\cos^{n-2}\alpha_n + B\cos^{n-4} + \ldots & 2^{n-1}\cos^{n-1}\alpha_n + A'\cos^{n-2}\alpha_n + \ldots & \cos \end{array} \right.$$

Or, d'après un principe duquel nous nous sommes déjà servis, nous pourrons supprimer les derniers termes de ces éléments, puis les avant-derniers, et ainsi de suite, de manière que chaque élément ne contienne plus que son premier terme.

Faisons ensuite sortir les puissances de 2 en dehors du déterminant, nous aurons enfin

$$D_2 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_n D_1.$$

SOLUTION DES QUESTIONS 408 ET 409.

(voir t. XVI, p. 402);

Question 408.

Faisant

$$a_1 = 0,$$

le déterminant ayant deux lignes égales s'annule; donc D a pour facteur a_1; on démontre de même qu'il a pour facteur a_2, etc; d'ailleurs les exposants ne peuvent dépasser l'unité; donc

$$D = a_1 a_2 \ldots a_n;$$

on voit aussi que le coefficient est 1.

Question 409.

Faisant

$$a_1 = 0,$$

on revient au déterminant précédent; donc il existe un terme $a_2 a_3 a_4 \ldots a_n$. Faisant ensuite

$$a_2 = 0,$$

on obtient le terme $a_1 a_3 a_4 \ldots a_n$, et ainsi de suite.

NOTE SUR LA QUESTION 403

(voir p. 117);

PAR M. P. CHALLIOT,
Elève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Quelle est la forme générale de l'équation des surfaces qui passent par le point (x', y', z') et par l'intersection des deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0?$$

Soit F une fonction quelconque de x, y, z, λ une indéterminée arbitraire.

L'équation générale des surfaces passant par l'intersection des deux surfaces proposées pourra être représentée par

$$f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)\varphi(x, y, z) = 0.$$

Exprimons que le point (x', y', z') est sur la surface

$$f(x', y', z') + \lambda F(x', y', z)\varphi(x', y', z') = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{f(x', y', z')}{F(x', y', z')\varphi(x', y', z')}.$$

Par suite l'équation demandée est

$$\frac{f(x, y, z)}{f(x', y', z')} = \frac{F(x, y, z)}{F(x', y', z')} \cdot \frac{\varphi(x, y, z)}{\varphi(x', y', z')}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 405

(voir t. XVI, p. 401);

PAR M. C. SOUILLART,
Ancien élève de l'École Normale,
ET M. ÉMILE MATHIEU,
Professeur.

Étant donnée l'équation

$$(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z') = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ,$$

trouver les valeurs de X, Y, Z en fonction de x, y, z, x', y', z'.

Le polynôme $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ peut être mis sous la forme d'un déterminant.

On a

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

de même

$$x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z' = - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ y' & z' & x' \\ z' & x' & y' \end{vmatrix}.$$

On aura donc

$$(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z')$$

$$= \begin{vmatrix} xx' + yy' + zz' & xy' + yz' + zx' & xz' + yx' + zy' \\ yx' + zy' + xz' & yy' + zz' + xx' & yz' + zx' + xy' \\ zx' + xy' + yz' & zy' + xz' + yx' & zz' + xx' + yy' \end{vmatrix}$$

Si l'on pose

$$X = xx' + yy' + zz',$$
$$Y = xy' + yz' + zx',$$
$$Z = xz' + yx' + zy' \text{ (*)},$$

le déterminant-produit devient

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \\ Z & X & Y \end{vmatrix} = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ.$$

Les valeurs précédentes de X, Y, Z répondent donc à la question.

La formule

$$(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z')$$
$$= X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ,$$

dans laquelle

$$X = xx' + yy' + zz',$$
$$Y = xy' + yz' + zx',$$
$$Z = xz' + yx' + zy',$$

est un cas particulier de la formule

$$\begin{vmatrix} y & z & u & v\ldots & r & s & t \\ z & u & v\ldots & & s & t & x \\ u & v\ldots & & . & t & x & y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & y & z\ldots & & & r & s \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x' & y' & z' & u'\ldots & r' & s' & t' \\ y' & z' & u'\ldots & & s' & t' & x' \\ z' & u' & v'\ldots & & t' & x' & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t' & x' & y' & z'\ldots & & r' & s' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X & Y & Z & U\ldots & R & S & T \\ Y & Z & U & V\ldots & S & T & X \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T & X & Y & Z\ldots & & R & S \end{vmatrix}$$

(*) Ce résultat est énoncé dans l'*Algèbre* de M. Bertrand, 2e édition.

dans laquelle on pose

$$X = xt' + ys' + zr' + \ldots + sy' + tx',$$
$$Y = xx' + yt' + zs' + \ldots + sz' + ty',$$
$$Z = xy' + yx' + zt' + \ldots + sx' + tr',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par exemple, si les déterminants sont du quatrième ordre, on a

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{l}-x^4+y^4-z^4+u^4-4y^2xz-4xu^2z\\ +4x^2yu+4yuz^2+2x^2z^2-2u^2y^2\end{array}\right)\\ \times&\left(\begin{array}{l}-x'^4+y'^4-z'^4+u'^4-4y'^2x'z'-4x'u'^2z'\\ +4x'^2y'u'+4y'u'z'^2+2x'^2z'^2-2u'^2y'^2\end{array}\right)\\ =&-X^4+Y^4-Z^4+U^4-4Y^2XZ-4XU^2Z\\ &+4X^2YU+4YUZ^2+2X^2Z-2U^2Y^2,\end{aligned}$$

en posant

$$X = xu' + yz' + zy' + ux',$$
$$Y = xx' + yu' + zz' + uy',$$
$$Z = xy' + yx' + zu' + u'z',$$
$$U = xz' + yy' + zx' + uu'.$$

OBSERVATIONS SUR LA SOLUTION DE LA QUESTION 195

(voir page 79);

PAR M. DEWULF.

L'équation

$$D = 0$$

se vérifie par des calculs qui ne sont ni longs ni compliqués (t. XVII, p. 81).

En effet

$$x' = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx_0} & \frac{d\Delta}{dx_0} \\ \frac{d\varphi}{dy_0} & \frac{d\Delta}{dy_0} \end{vmatrix} \qquad y' = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dy_0} & \frac{d\Delta}{dy_0} \\ \frac{d\varphi}{dx_0} & \frac{d\Delta}{dx_0} \end{vmatrix} \qquad z' = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dz_0} & \frac{d\Delta}{dz_0} \\ \frac{d\varphi}{dx_0} & \frac{d\Delta}{dx_0} \end{vmatrix}$$

Donc

$$x' = -y'.$$

De même

$$x'' = -y'', \quad x''' = -y'''.$$

Les deux premières colonnes de $-D$ sont donc identiques, et, par suite,

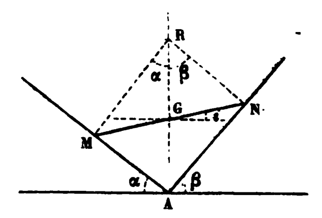
$$D = 0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 425 (HOLDITSCH)

(voir page 33);

PAR MM. MARIUS LAQUIÈRE ET GEORGES FÉNÉON,
Élèves du lycée Saint-Louis.

Le grand axe d'une ellipse étant dans une position verticale, toute droite homogène pesante passant par le foyer et s'appuyant par ses deux extrémités sur l'ellipse est en équilibre.



Je cherche la condition nécessaire pour que la droite MN homogène et pesante appuyée par ses deux extrémités sur les droites MA, NA inclinées des angles α et β sur l'horizon soit en équilibre.

La droite peut être considérée comme soumise à trois forces : à son poids P appliqué en son milieu G, et aux deux résistances normales des deux plans. Pour l'équilibre, ces forces doivent concourir sur la verticale menée

par le milieu de la droite. Cette condition géométrique, qui n'est réalisée que d'une seule manière, caractérise la position d'équilibre (*).

La question est donc ramenée à chercher les conditions auxquelles doit satisfaire la droite appuyée sur l'ellipse pour que les deux normales concourent sur la parallèle au grand axe menée par le milieu de la droite.

Soient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

l'équation de l'ellipse, et

$$(1) \qquad y = m(x - k)$$

celle de la droite, k étant l'abscisse à l'origine que nous déterminerons par la condition d'équilibre.

Les ordonnées des points d'intersection de cette droite avec l'ellipse seront les racines de l'équation

$$(2) \qquad \left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) y^2 + \frac{2b^2 k}{m} y - b^2(a^2 - k^2) = 0;$$

(*) C'est du reste le résultat que donne le calcul.

Appelant i l'angle d'inclinaison de la droite MN sur l'horizon et appliquant les équations d'équilibre, on arrive à la condition

$$\tang i = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{2 \sin\beta \sin\alpha},$$

qui est toujours remplie lorsque les normales aux deux plans en M et N concourent sur la verticale du milieu G de la droite. En effet, soient $2l$ la longueur de la droite et m la distanoe du point G au point de concours R des normales; la droite GR étant verticale, on a, dans les triangles MRG, NRG,

$$\frac{\sin\beta}{\cos(\beta - i)} = \frac{l}{n} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha + i)},$$

ou

$$\sin\beta(\cos\alpha \cos i - \sin\alpha \sin i) = \sin\alpha(\cos\beta \cos i - \sin\beta \sin i),$$

ou

$$\tang i = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{2 \sin\beta \sin\alpha}.$$

l'équation de la normale au point M (x', y'),

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'),$$

d'où

$$x = \frac{c^2}{a^2} x' + \frac{b^2 x'}{a^2 y'} y.$$

L'équation

$$\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x'}{y'} - \frac{x''}{y''}\right) y_1 + \frac{c^2}{a^2}(x' - x'') = 0$$

donnera l'ordonnée y_1 du point d'intersection des deux normales en M et N (x'', y'').

Résolvant,

$$y_1 = \frac{c^2}{b^2} \frac{(x'' - x')\, y' y''}{x' y'' - y' x''};$$

mais les coordonnées x', y', x'', y'' satisfaisant à l'équation (1), on a

$$x' = \frac{mk + y'}{m}, \quad x'' = \frac{mk + y''}{m},$$

d'où, substituant,

$$y_1 = \frac{c^2}{b^2} \times \frac{y' y''}{mk}.$$

L'équation (2) nous donne

$$y' y'' = - \frac{b^2 (a^2 - k^2) m^2}{a^2 m^2 + b^2},$$

$$\frac{y' + y''}{2} = - \frac{b^2 km}{a^2 m^2 + b^2},$$

et, d'après ce que nous avons dit pour qu'il y ait équilibre, il faut que

$$y_1 = \frac{y' + y''}{2},$$

donc

$$y_1 = - \frac{c^2 (a^2 - k^2) m}{k (a^2 m^2 + b^2)} = - \frac{b^2 km}{a^2 m^2 + b^2}$$

ou

$$c^2 (a^2 - k^2) = b^2 k^2,$$

d'où

$$k = \pm c.$$

La droite doit donc passer par le foyer; du reste il est évident que c'est par le foyer inférieur.

Nos calculs supposent que m est fini et différent de zéro. Si ce coefficient angulaire était nul, la droite serait verticale, se confondrait avec l'axe, car k ne peut être infini; la droite passera encore par le foyer. Dans le cas où m serait infini, la droite alors horizontale est toujours en équilibre, car la condition géométrique est toujours satisfaite, les deux normales se coupent sur l'axe; de plus les forces sont égales aux deux extrémités de la droite.

Ce cas est le seul dans lequel une droite ne passant pas par le foyer puisse être en équilibre, et toute droite passant par le foyer est en équilibre.

Note du Rédacteur. Soient a et b les distances de M et N à la directrice; c, d les distances des mêmes points au foyer; la distance du centre de gravité de la corde MN à la directrice est $\frac{a+b}{2}$, ou, d'après la propriété du foyer, $\frac{m(c+d)}{2}$ où m est constant, et l'on a

$$c + d < \text{MN}.$$

Mais, dans le cas d'équilibre, on sait que la distance du centre de gravité doit être un minimum, ce qui a lieu lorsque $c + d = \text{MN}$, c'est-à-dire lorsque la corde passe par le foyer.

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

IX.

RECHERCHE DES RACINES D'UNE ÉQUATION TRANSCENDANTE.

Lorsqu'on a substitué des nombres équidistants et assez voisins pour que les différences des résultats puissent être considérées comme égales entre elles à partir d'un certain ordre, on continue l'opération comme s'il s'agissait d'une équation algébrique. (Extrait du *Programme officiel.*)

On voit que, dans la recherche des racines d'une équation transcendante, le procédé prescrit par le Programme officiel se fonde sur cette proposition :

Lorsqu'on substitue à la variable d'une fonction transcendante, continue, des nombres équidistants et suffisamment rapprochés les uns des autres, les différences des résultats de ces substitutions, à partir d'un certain ordre et dans un certain intervalle, présentent des variations assez petites pour qu'on puisse en faire abstraction et considérer les différences comme égales entre elles.

Est-ce une proposition qu'on doive admettre comme un fait d'expérience, ou faut-il en donner l'explication? Le Programme n'en dit rien. Quant aux Algèbres conformes au Programme, une seule, et à l'occasion de la construction des Tables numériques, contient quelques mots qui se rapportent à la proposition dont il s'agit; nous les transcrivons ici.

« Il arrive en effet *presque* toujours que, dans une série » de nombres résultant d'une loi régulière et suffisam-

» ment rapprochés les uns des autres, les différences
» tendent de plus en plus vers l'égalité, à mesure que
» leur ordre s'élève. En négligeant des quantités fort pe-
» tites, on pourra, à partir d'un certain ordre, leur
» supposer, dans un certain intervalle, une valeur inva-
» riable, et construire la Table comme s'il s'agissait des
» valeurs d'un polynôme.

» Ne pouvant donner ici la raison de ce fait général,
» nous nous bornerons à le développer sur deux exem-
» ples. »

Il serait à désirer que la Commission chargée de la rédaction du Programme officiel voulût bien donner un peu plus de développement à ce Programme, afin de ne laisser subsister aucun doute sur le sens des énoncés qu'il renferme.

Dans un remarquable Rapport rédigé par M. Le Verrier, on lit :

« En laissant toute latitude à cette Commission, nous
» exprimons cependant le vœu qu'elle se conforme aux
» bases que nous avons posées précédemment.

» Elle devra restreindre l'étendue des cours mathéma-
» tiques et en éliminer nombre de difficultés considéra-
» bles, afin de mieux approprier la matière à la mémoire
» et à l'intelligence moyenne des élèves. Elle devra, au-
» tant qu'il est possible, introduire des exemples, et des
» applications puisées dans la pratique.

» Il est en outre de *toute nécessité* que sur chacun des
» cours elle fournisse un Programme *très-développé*, en-
» trant dans des détails *minutieux*, et qui enchaîne tel-
» lement les professeurs, qu'il leur soit impossible d'en
» fausser l'esprit. Cette condition est de *toute rigueur*. »

Cette condition ne me semble pas avoir été rigoureusement remplie.

G.

DÉMONSTRATION D'UNE PROPOSITION RELATIVE AUX ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

Dans les Traités d'Algèbre on démontre ces deux propositions :

1°. Si deux nombres a, b, substitués à l'inconnue x d'une équation algébrique entière

$$f(x) = 0,$$

à coefficients réels, donnent des résultats de signes contraires $f(a)$, $f(b)$, l'équation a au moins une racine réelle comprise entre a et b.

2°. Lorsque deux nombres a, b comprennent entre eux un nombre impair de racines réelles de l'équation algébrique

$$f(x) = 0,$$

les résultats $f(a)$, $f(b)$ des substitutions de a et b à x dans $f(x)$ ont des signes contraires, et si le nombre des racines réelles de l'équation

$$f(x) = 0$$

comprises entre a et b est pair, $f(a)$ et $f(b)$ ont le même signe.

La démonstration que l'on donne de la première de ces propositions s'applique à une équation transcendante dont le premier membre est une fonction continue pour les valeurs de x comprises entre a et b. Mais, il n'en est pas de même du raisonnement que l'on fait ordinairement pour établir la seconde proposition, il ne convient qu'aux équations algébriques. Et comme on se sert souvent de

cette seconde proposition dans la recherche des racines d'une équation transcendante, il nous semble utile de faire voir qu'elle est encore vraie pour des équations de cette nature.

Dans tout ce qui va suivre, il sera supposé que les fonctions transcendantes considérées sont continues, du moins dans l'intervalle des valeurs substituées à la variable. De plus, on admettra les définitions que nous allons faire connaître.

Lorsqu'une racine α d'une équation transcendante

$$f(x) = 0$$

étant substituée à x dans la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ ne réduit pas à zéro cette dérivée, on dit que α est une racine *simple* de l'équation

$$f(x) = 0,$$

ou bien encore que l'équation n'admet qu'une seule racine égale à α.

Mais, lorsque la substitution de α à x annule $f(x)$ et un certain nombre $(n-1)$ de ses dérivées successives $f'(x), f''(x), \ldots, f^{n-1}(x)$, l'équation

$$f(x) = 0$$

est considérée comme ayant n racines égales à α. Suivant qu'on a

$$n = 2, \quad n = 3, \ldots,$$

la racine α est nommée racine *double*, racine *triple*, etc.

Ces définitions admises, désignons par α, β, δ, γ, etc., les valeurs des racines réelles d'une équation transcendante

$$f(x) = 0,$$

comprises entre deux nombres donnés a, b. Et supposons

d'abord que α, β, δ, γ, etc., représentent des racines *simples*. Nous allons faire voir que $f(a)$, $f(b)$ ont des signes contraires ou le même signe, suivant que le nombre des racines α, β, δ, γ, etc., est impair ou pair.

Pour plus de précision, nous admettrons qu'on a $a<b$ et que les racines α, β, δ, γ, etc., soient rangées par ordre de grandeur; ainsi, les nombres a, α, β, δ, γ,..., b, formeront une suite croissante.

Lorsque x varie depuis a jusqu'à α, la fonction $f(x)$ conserve constamment le même signe, puisque l'équation

$$f(x)=0$$

n'a aucune racine comprise entre a et α. Il en est de même pour les valeurs de x comprises entre deux des racines consécutives α, β, δ, γ, etc., et pour les valeurs de x comprises entre la dernière de ces racines et b. Quand x passe par l'une des valeurs α, β, etc., la fonction $f(x)$ change de signe en passant par zéro. En effet, nommons h une quantité *très-petite* ou susceptible de devenir aussi petite qu'on voudra. Si $f(\alpha-h)$ et $f(\alpha+h)$ avaient le même signe, la valeur de $f(\alpha)$ qui est nulle serait nécessairement un *maximum* ou un *minimum* de $f(x)$. Ce serait un maximum si $f(\alpha-h)$ et $f(\alpha+h)$ étaient négatifs, et un minimum si le signe commun de ces deux quantités était $+$. Dans ces deux cas, il faudrait, d'après un principe connu, que $f'(\alpha)=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse puisque α est une racine simple de $f(x)=0$. On voit donc qu'en faisant croître x d'une manière continue depuis a jusqu'à b, la fonction $f(x)$ change de signe autant de fois qu'il y a de racines α, β, γ, etc., comprises entre a et b. D'où il faut conclure que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes contraires ou le même signe, suivant que le nombre de ces racines est impair ou pair.

Supposons maintenant que α soit une racine *double* de

$f(x) = 0$, on aura

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = 0,$$

et le nombre $f''(\alpha)$ ne sera pas nul. Dans ce cas, $f(\alpha)$ est un maximum ou un minimum de $f(x)$. Et, parce que $f(\alpha) = 0$, il faudra que $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$ aient le même signe.

Si α est une racine triple, on aura

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = 0, \quad f''(\alpha) = 0,$$

et $f'''(\alpha)$ sera différent de zéro; alors $f(\alpha)$ ne peut être ni un maximum ni un minimum de $f(x)$, et, par conséquent, $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$ auront des signes contraires, et ainsi de suite; c'est-à-dire que $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$ ont le même signe si le nombre des racines égales à α est pair, et que $f(\alpha - h)$, $f(\alpha + h)$ ont des signes différents quand le nombre des racines égales à α est impair. De là nous concluons que dans tous les cas $f(a)$, $f(b)$ ont des signes contraires, ou le même signe, suivant que le nombre des racines réelles de $f(x) = 0$ comprises entre a et b est impair ou pair, en adoptant dans l'évaluation du nombre des racines comprises entre a et b les définitions que nous avons données.

De cette proposition, on peut immédiatement conclure que :

Si deux nombres a, b, *substitués à* x *dans* f(x), *donnent des résultats de signes contraires*, f(a), f(b), *l'équation*

$$f(x) = 0$$

a un nombre impair de racines réelles comprises entre a *et* b, *et si* f(a) *et* f(b) *ont le même signe*, *les deux nombres* a *et* b *ne comprennent aucune racine de l'équation, ou ils en comprennent un nombre pair.* G.

SOLUTION DE LA QUESTION 393

(voir t. XVI, p. 312);

PAR M. H. DELLAC,
Professeur au lycée d'Amiens.

Dans la parabole du troisième ordre

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux ordonnées $x = 0$, $x = \delta$ est

$$s_0 = a\delta + b\frac{\delta^2}{2} + c\frac{\delta^3}{3} + d\frac{\delta^4}{4},$$

et entre les ordonnées $x = \delta$, $x = 2\delta$

$$s_1 = a\delta + 3b\frac{\delta^2}{2} + 7c\frac{\delta^3}{3} + 15d\frac{\delta^4}{4}.$$

Dans la parabole du second ordre

$$y = A + Bx + Cx^2$$

les aires correspondantes sont

$$S_0 = A\delta + B\frac{\delta^2}{2} + C\frac{\delta^3}{3},$$

$$S_1 = A\delta + 3B\frac{\delta^2}{2} + 7C\frac{\delta^3}{3}.$$

Les aires des deux segments compris entre les deux courbes sont donc

$$M = s_0 - S_0$$

$$= (a - A)\delta + (b - B)\frac{\delta^2}{2} + (c - C)\frac{\delta^3}{3} + d\frac{\delta^4}{4},$$

et

$$N = S_1 - s_1$$
$$= (A - a)\delta + 3(B - b)\frac{\delta^2}{2} + 7(C - c)\frac{\delta^3}{3} - 15d\frac{\delta^4}{4}.$$

Leur différence est donc

$$M - N = 2(a - A)\delta + 2(b - B)\delta^2$$
$$+ \frac{8}{3}(c - C)\delta^3 + 4d\delta^4.$$

Les deux courbes ayant trois ordonnées communes y_0, y_1, y_2 pour $x = 0$, $x = \delta$, $x = 2\delta$, on a

$$y_0 = a,$$
$$y_1 = a + b\delta + c\delta^2 + d\delta^3,$$
$$y_2 = a + 2b\delta + 4c\delta^2 + 8d\delta^3,$$
$$y_0 = a,$$
$$y_1 = A + B\delta + C\delta^2,$$
$$y_2 = A + 2B\delta + 4C\delta^2.$$

Multipliant ces équations respectivement par 1, 4, 1, — 1, — 4, — 1, et ajoutant, il vient

$$0 = 6(a - A) + 6(b - B)\delta + 8(c - C)\delta^2 + 12d\delta^3.$$

Or le second membre est la valeur de M — N multipliée par $\frac{3}{\delta}$; donc

$$M = N.$$

Ainsi les deux segments curvilignes compris entre les deux paraboles sont équivalents entre eux. Comme, par rapport à chaque courbe, l'un des segments est intérieur et l'autre extérieur, les deux paraboles comprennent la même aire entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux ordonnées extrêmes $x = 0$, $x = 2\delta$. Ceci étant démontré, les deux corollaires énoncés sont évidents.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 393

(voir t. XVI, p 312);

PAR M J.-CH. DUPAIN.

Dans la parabole

(1) $$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

on mène cinq ordonnées équidistantes Aa, Bb, Cc, Dd, Ee; par les points A, C, E, on fait passer la parabole

(2) $$y = A + Bx + Cx^2,$$

je dis que l'aire des deux courbes est la même.

Soit $f(x)$ le second membre de (1); on peut écrire

(3) $$y = f(o) + xf'(o) + \frac{x^2}{2}f''(o) + \frac{x^3}{6}f'''(o),$$

l'aire de la première courbe sera

(4) $$\left\{\begin{aligned}\int_0^{4\delta} y\,dx = 4\delta f(o) + 8\delta^2 f'(o) + \frac{32}{3}\delta^3 f''(o)\\ + \frac{32}{3}\delta^4 f'''(o).\end{aligned}\right.$$

Le théorème de Simpson qui s'applique *exactement* à la seconde courbe donne pour son aire

$$\frac{\delta}{3}[f(o) + f(4\delta) + f(2\delta)].$$

En développant $f(4\delta)$ et $f(2\delta)$ par la formule (3), on retrouve l'expression (4). C. Q. F. D.

Observation. Cette solution est un cas particulier d'un calcul destiné à comparer plusieurs formules de quadra-

ture et faisant partie d'un travail que nous avons adressé, il y a quelque temps, à M. le Rédacteur des *Annales*. Le corollaire second s'applique aussi à une formule de M. Catalan (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 415) et à une formule que nous avons proposée dans le travail cité.

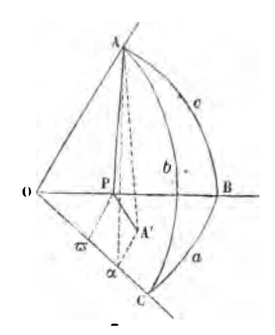
Note du Rédacteur. Ce travail sera publié incessamment.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

(voir tome VIII, page 58);

PAR M. EMILE PATRY,
Élève de l'École Normale supérieure.

Soient ABC un triangle sphérique, OA, OB, OC les rayons menés au centre. Je mène AP perpendiculaire



sur OB et je projette le triangle OAP sur OC. AA' étant perpendiculaire sur le plan BOC, il résulte du théorème des trois perpendiculaires que la projection de AP sur OC se confond avec celle de A' P sur la même droite; d'ailleurs A'P est perpendiculaire sur OB. On a donc

$$\text{OA}\cos(\text{OA},\ \text{OC}) - \text{PA}'\cos(\text{PA}', \text{OC}) - \text{OP}\cos(\text{OP},\ \text{OC}) = 0,$$

et si $OA = 1$,

$$\cos b - \sin c \cos B \cos(90^\circ - a) - \cos c \cos a = 0,$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin c \sin a \cos B.$$

On a

$$O\alpha = O\pi + \pi\alpha,$$

et cette équation subsiste, de quelque manière que les points α et π soient placés relativement à O, pourvu que l'on donne aux droites les signes convenables; ainsi la démonstration convient à tous les cas.

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir page 163);

PAR M. VANNSON.

Problème. *Étant donnée sur la sphère une courbe dont l'équation est*

$$\varphi(xy) = 0,$$

x *et* y *représentant les tangentes des coordonnées d'un de ses points, trouver l'équation de l'arc de grand cercle tangent à cette courbe en un point donné.*

Si nous appelons a le coefficient de x dans l'équation d'une sécante, nous aurons, quand $x'' = x'$, etc.,

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

et la limite de ce rapport sera le coefficient de x dans l'équation de la tangente; on aura donc, comme sur un plan, α désignant la limite de a,

$$\alpha = -\frac{\varphi'_x(x'y')}{\varphi'_y(x'y')}.$$

L'équation demandée sera donc

$$(y-y')\varphi'_y(x'y')+(x-x')\varphi'_x(x'y')=0.$$

On voit que la méthode consiste à passer d'un point de la courbe au point infiniment voisin en donnant des accroissements infiniment petits aux tangentes des coordonnées, au lieu de les attribuer aux coordonnées ellesmêmes, ce qui serait beaucoup moins simple.

Si pour des valeurs particulières

$$\varphi'_x=0,\quad \varphi'_y=0,$$

α se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, ce qui indique un point multiple, α se trouve alors comme sur un plan par l'équation du second degré

$$\alpha^2\varphi''_y(x'y')+2\alpha\varphi''_{x,y}(x'y')+\varphi''_x(x'y')=0.$$

Si les racines sont réelles, on a un point double ; dans le cas contraire, un point isolé.

Soit, par exemple, la courbe représentée par l'équation

$$x^3+y^3-3xy=0,$$

que nous pouvons appeler le folium sphérique, on trouve pour l'origine

$$\alpha=\frac{0}{0},$$

et l'équation du second degré donne une racine nulle et une racine infinie. La courbe est donc à l'origine tangente aux deux axes. Le point où la courbe coupe l'arc bissecteur de l'angle des axes est donné par l'équation

$$x=\frac{3}{2},$$

et on trouve aisément que l'arc tangent en ce point est

perpendiculaire à l'arc bissecteur. Sur un plan, on chercherait les points où la tangente est parallèle à la bissectrice. Ici la question analogue consiste à trouver une circonférence tangente qui coupe l'arc bissecteur à 90 degrés de l'origine; la latitude de ce point étant 45 degrés, on posera

$$1 = \frac{x_1^2 - y_1}{x' - y_1^2},$$

ou, en général

$$\varphi'_x + \varphi'_y = 0.$$

Cette équation, combinée avec celle de la courbe, donne les points cherchés.

Le folium sur un plan a une asymptote, c'est-à-dire une tangente pour laquelle les coordonnées du point de contact sont infinies. Nous allons résoudre la question analogue sur la sphère pour une courbe quelconque. D'abord, pour avoir le coefficient de x dans l'équation de la tangente cherchée, il faut trouver la limite vers laquelle tend l'expression $-\frac{\varphi'_x(x'y')}{\varphi'_y(x'y')}$ quand x' et y' deviennent infinies. Pour cela, divisons par x' les deux membres de l'équation de la tangente et supposons ensuite x' infini, nous aurons

$$\lim\left(-\frac{\varphi'_x(x'y')}{\varphi'_y(x'y')}\right) = \lim\left(\frac{y'}{x'}\right).$$

Cette limite se trouvera comme dans la question des asymptotes sur un plan. Soit α l'expression supposée réelle qu'on aura trouvée pour limite; le terme indépendant de l'équation cherchée sera la limite vers laquelle tend le binôme $y' - \alpha x'$ quand x' et y' deviennent infinies. Le calcul ne différera donc en rien de celui qu'on ferait pour la détermination des asymptotes dans une courbe plane.

Dans le cas du folium, on trouve

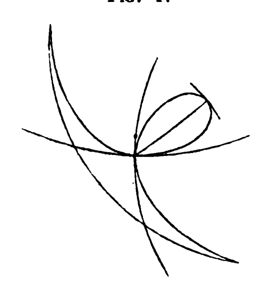
$$a = -1 \quad \text{et} \quad b = -1;$$

l'équation de la tangente demandée est donc

$$y + x + 1 = 0.$$

On a vu que la latitude du point de contact, situé à 90 degrés de l'origine, était égale au coefficient de x, c'est-à-dire à -1; il est donc à 45 degrés au-dessous de l'axe des x; d'ailleurs la circonférence dont nous avons l'équation coupe les axes à 45 degrés du côté des coordonnées négatives. Ces remarques et celles qui ont précédé permettent de construire le folium sphérique. Remar-

Fig. 1.



quons toutefois que comme on peut ajouter 180 degrés à un arc sans changer sa tangente, à tout point qu'on aura construit d'après l'équation, correspondra un autre point diamétralement opposé. Pour éviter la confusion, nous n'avons représenté sur la figure qu'une moitié de la courbe.

Appliquons maintenant l'équation générale des tangentes à une courbe quelconque du deuxième degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

L'équation de la circonférence tangente à la courbe en un

point donné sera évidemment

$$y(2Ay'+Bx'+D)+x(2Cx'+By'+E)$$
$$+Dy'+Ex'+2F=0.$$

Les axes peuvent être rectangulaires ou obliques. Si on les suppose rectangulaires et qu'on demande les tangentes perpendiculaires à l'axe des x, l'équation devra se réduire à la forme

$$x=h;$$

on aura donc

$$2Ay'+Bx'+D=0.$$

Les points de contact seront donc à la rencontre de la circonférence représentée par cette équation avec la courbe. Si l'on résout l'équation de la courbe par rapport à y, on reconnaîtra facilement que tout arc de la courbe perpendiculaire aux x a son centre sphérique de moyennes distances sur la circonférence qui passe par les points de contact.

Si l'on veut mener une tangente par un point situé arbitrairement sur la sphère, on aura, en appelant x'', y'' les tangentes des coordonnées de ce point,

$$y'(2Ay''+bx''+D)+x'(2Cx''+By''+E)$$
$$+Dy''+Ex''+2F=0$$

et

$$\varphi(x'y')=0.$$

La première de ces équations, en y regardant y' et x' comme des variables, représente une circonférence passant par les points de contact, et comme elle peut être construite, quand même les coordonnées x', y' seraient imaginaires, nous appellerons cette circonférence la polaire du point x'', y''. On peut démontrer, comme pour les courbes planes, que si des points sont situés sur une même

circonférence de grand cercle, leurs polaires passent par un même point qui a pour polaire la circonférence donnée, et réciproquement.

Supposons que D et E soient nuls, cas dans lequel la courbe est rapportée à son centre O, et soit x'' la tangente de l'abscisse d'un point A sur l'axe des x, la polaire de ce point coupera l'axe en un point B représenté par l'équation

$$x = -\frac{F}{Cx''}.$$

Soit C l'intersection de la courbe avec l'axe, on trouve

$$\text{tang}^2 OC = \frac{F}{C},$$

donc

$$\text{tang}\,OA \times \text{tang}\,OB = \text{tang}^2 OC.$$

D'où l'on voit que la polaire d'un point coupe la circonférence qui joint le centre à ce point à une distance du centre, dont la tangente, multipliée par celle de la distance du point au centre, égale le carré de la tangente du rayon passant au point donné.

Si

$$x'' = \infty,$$

on a

$$x = 0,$$

d'où l'on voit que la polaire d'un point à 90 degrés du centre passe par le centre; en d'autres termes, la circonférence polaire du centre est un grand cercle décrit de ce centre comme pôle.

Réciproquement, si les polaires des deux points A et B, non situés sur un même diamètre, passent en un point O situé à 90 degrés de A et de B, le point O sera centre de la courbe. En effet, prenons le point O comme

origine et faisons passer les axes l'un par A, l'autre par B. La polaire du point A qui a pour coordonnées

$$y' = 0, \quad x' = \frac{1}{0}$$

sera

$$By + 2Cx + E = 0.$$

La polaire de B sera de même

$$Bx + 2Ay + D = 0,$$

puisqu'elles passent par l'origine, on a

$$D = 0, \quad E = 0;$$

donc le point O est le centre de la courbe.

Remarque. On voit que le mot pôle en géométrie sphérique a deux significations, d'où pourrait résulter une certaine confusion dans les énoncés. Pour l'éviter, nous appellerons pôle d'une circonférence de grand cercle le point dont cette circonférence est la polaire par rapport à une courbe donnée, et nous appellerons le point situé à 90 degrés des points d'une circonférence le pôle sphérique de cette circonférence.

PROBLÈME. *Étant donnée l'équation générale des courbes du second degré, prouver que ces courbes ont un centre et trouver ses coordonnées.* (BORGNET.)

En admettant dans le théorème qui précède l'existence du centre, nous avons vu qu'il avait pour polaire une circonférence dont ce centre lui-même était le pôle sphérique. Soient donc x', y' les tangentes des coordonnées d'un point jouissant de cette propriété. La polaire de ce point a pour équation

$$y(2Ay' + Bx' + D) + x(2Cx' + By' + E) + Dy' + Ex' + 2F = 0.$$

D'un autre côté, la circonférence ayant ce même point pour pôle sphérique est, comme on l'a vu plus haut,

$$yy' + xx' + 1 = 0.$$

Ecrivons que ces deux équations représentent la même ligne. Nous aurons

$$\frac{2Ay' + Bx' + D}{y'} = Dy' + Ex' + 2F$$

et

$$\frac{2Cx' + By' + E}{x'} = Dy' + Ex' + 2F,$$

équations que nous avons déjà obtenues par la transformation des coordonnées.

On peut aussi trouver la direction des axes de la courbe sans employer les formules de transformation par la considération des polaires. Pour cela, soient y' et x' les tangentes des coordonnées d'un point qnelconque de l'un des axes, la polaire de ce point devra être perpendiculaire à l'arc qui joint ce point à l'origine. Or le coefficient de x pour le dernier arc est $\frac{x'}{y'}$ et pour l'arc polaire c'est $-\frac{By' + 2Cx'}{Bx' + 2Ay'}$; or il est aisé de voir que la condition exprimant que deux arcs sont rectangulaires, l'un d'eux passant par l'origine, est la même que sur le plan ; on aura donc

$$\frac{y'}{x'}\left(\frac{By' + 2Cx'}{Bx' + 2Ay'}\right) = 1$$

ou, si l'on pose $\frac{y'}{x'} = A'$,

$$A'^2 + 2\left(\frac{C - A}{B}\right)A' - 1 = 0;$$

c'est aussi ce que donneraient les formules de transfor-

mation. Il est aisé de voir que les coefficients de l'équation transformée se calculeront par les mêmes formules que pour une courbe plane.

PROBLÈME. *Étant donnée l'équation générale du second degré, trouver les conditions pour qu'elle représente un cercle.*

Remarquons d'abord que si l'on prend un point quelconque A à 90 degrés du pôle sphérique de ce cercle, la polaire du point A aura ce même point pour pôle sphérique; réciproquement, si deux points A et B sont à 90 degrés du centre d'une courbe du second degré, et que les polaires de A et de B aient ces mêmes points pour pôles sphériques, la courbe est un cercle, si toutefois la distance des points A et B n'est pas égale à un quadrant; nous nous bornerons à l'énoncé de cette réciproque qui se démontre facilement.

Cela posé, soient x', y' les coordonnées du centre de la courbe, les points à 90 degrés du centre sont sur une circonférence qui a pour équation

$$yy' + xx' + 1 = 0.$$

Elle coupe l'axe des x en un point A qui a pour abscisse $-\frac{1}{x_1}$ et l'autre axe en un point B qui a pour ordonnée $-\frac{1}{y_1}$. Nous supposerons que les points A et B ne sont pas distants de 90 degrés; si cela avait lieu dans un exemple particulier, on pourrait remplacer un des points A et B par un autre point de la circonférence qui les joint

La polaire de A a pour équation

$$y(Dx' - B) + x(Ex' - 2C) + 2Fx' - E = 0,$$

et la circonférence dont A est le pôle sphérique a pour

équation

$$x = x'.$$

Pour que ces équations représentent la même circonférence, il faut qu'on ait

$$x' = \frac{D}{B} \quad e \quad \frac{E - 2Fx'}{Ex' - 2C} = o,$$

d'où

$$\frac{DE - 2FB}{B} = \frac{EB - 2CD}{D};$$

en opérant de même pour le point B, on trouve

$$y' = \frac{B}{E},$$

et pour seconde condition

$$\frac{BD - 2AE}{E} = \frac{DE - 2FB}{B}.$$

Ces conditions sont établies dans l'ouvrage de M. Borgnet par une méthode toute différente et très-simple. Nous avons indiqué celle-ci comme une application de plus de la théorie des polaires.

Théorème. *Si par un point* A *on mène un arc de grand cercle qui coupe en* B *et* C *la courbe et en* D *la polaire du point* A, *les quatre points* A, B, C, D *seront harmoniques.*

Prenons le point A pour origine, sa polaire aura pour équation

$$Dy + Ex + 2F = o;$$

l'intersection de cette polaire avec l'axe sera donnée par l'équation

$$x = -\frac{2F}{E},$$

et les intersections de la courbe avec cet axe par l'équation

$$Cx^2 + Ex + F = 0.$$

Appelant x', x'' les deux racines, on aura

$$\frac{x' x''}{x' + x''} = -\frac{F}{E},$$

donc

$$2x' x'' = x(x' + x'')$$

ou

$$x(x'' - x') = x'(x - x'').$$

Si nous remplaçons x, x', x'' par des tangentes et la différence des tangentes sur deux arcs par le sinus de leur différence divisé par le produit de leurs cosinus, nous aurons la relation indiquée. Donc les quatre points sont harmoniques.

THÉORÈME. *Si par un point quelconque on mène deux arcs sécants à une courbe sphérique du second degré et qu'on joigne un point de section sur la première à un point de section sur la seconde, le lieu du point de rencontre des arcs obtenus sera une circonférence de grand cercle polaire du point donné.*

Se démontre comme sur un plan et donne lieu aux mêmes applications, entre autres : Mener par un point connu des tangentes à une courbe sphérique du second degré.

THÉORÈME. *Si trois courbes du second degré ont deux points communs et qu'elles se coupent deux à deux en d'autres points* A, A′, B, B′, C, C′, *les trois circonférences de grand cercle passant la première par* A, A′, *la deuxième par* B, B′, *la troisième par* C, C′, *auront un point commun.*

Se démontre comme sur un plan.

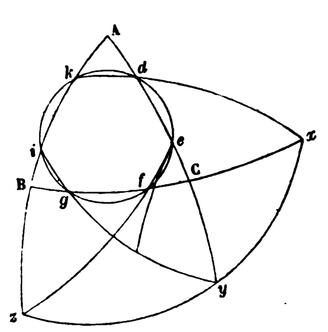
De là on peut tirer une démonstration du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une courbe du deuxième degré ; le théorème inverse (de Brianchon) sur l'hexagone circonscrit se démontrera par les polaires ; les corollaires et applications de ces théorèmes seront les mêmes que sur un plan, entre autres :

Si un triangle coupe une courbe du second degré en six points, on aura, en sous-entendant le mot sinus devant chaque arc,

$$Ad.Ae.Cf.Cg.Bi.Bk = Ak.Ai.Bg.Bf.Ce.Cd.$$

En effet, si l'on prolonge l'arc kd jusqu'à la rencontre de

Fig. 2.



Bc au point x, ef jusqu'à la rencontre de AB en z et ig jusqu'à celle de AC en y, d'après le théorème de l'hexagone, les trois points x, y, z sont sur un grand cercle. Ce cercle coupant les côtés du triangle ABC donne (transversales) la relation

$$\frac{Bx}{Cx}\cdot\frac{Cy}{Ay}\cdot\frac{Az}{Bz}=1.$$

L'arc kd coupant le même triangle donne

$$\frac{Ad}{dC}\cdot\frac{Cx}{Bx}\cdot\frac{Bk}{Ak}=1,$$

on a de même

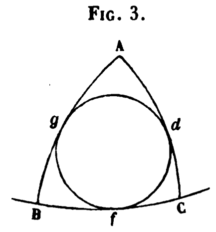
$$\frac{Ae}{Ce} \cdot \frac{Cf}{Bf} \cdot \frac{Bz}{Az} = 1,$$

et enfin

$$\frac{Cg}{Bg} \cdot \frac{Bi}{Ai} \cdot \frac{AY}{BY} = 1.$$

Si l'on multiplie ces quatre équations membre à membre,

FIG. 3.



on trouve la relation demandée. Si l'on suppose le triangle circonscrit, on trouve

$$Ad.Cf.Bg = Ag.Bf.Cd,$$

d'où l'on peut conclure que les trois arcs joignant chaque sommet au point de contact opposé concourent au même point. Les polaires donnent un théorème inverse.

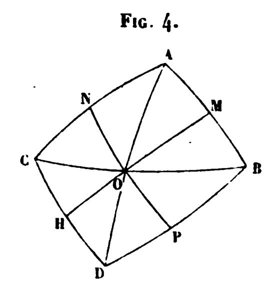
Remarque. Le théorème sur le produit des segments dans un triangle coupé par une conique s'étend à un quadrilatère en le décomposant en deux triangles, par suite à un polygone d'un nombre quelconque de côtés. Si on l'applique à un quadrilatère circonscrit, on trouve que le produit des sinus des quatre segments non contigus égale le produit des sinus des quatre autres segments.

Corollaire. De la relation précédente, on peut conclure cette autre propriété du quadrilatère circonscrit à une courbe du second degré : Les deux diagonales et les arcs qui joignent deux points de contact opposés forment un faisceau harmonique.

Soient θ l'angle des diagonales, α l'angle MOB, α' l'angle NOA; posons aussi

$$\mathrm{OB} = a, \quad \mathrm{OC} = a', \quad \mathrm{OA} = b, \quad \mathrm{OD} = b'.$$

Fig. 4.



Appliquant aux deux triangles AOM, DOM le principe des sinus proportionnels, nous aurons, en supprimant le mot sinus pour abréger,

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = \frac{(\theta - \alpha)}{\alpha} \cdot \frac{b}{a}, \quad \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{DP}} = \frac{\alpha'}{(\alpha' - \theta)}, \ldots;$$

de même pour les autres côtés. Multipliant ces égalités membre à membre, on trouve

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} = \frac{\sin \alpha'}{\sin (\alpha' - \theta)},$$

ce qui est bien la relation exprimant que les quatre arcs forment un faisceau harmonique. Il en résulte que si l'on représente l'arc HM par l'équation

$$y = \mathrm{A} x,$$

en prenant pour axes les diagonales, l'arc MP aura pour équation

$$y = - \mathrm{A} x.$$

Cette remarque nous servira plus loin pour obtenir l'é-

quation générale des coniques tangentes à quatre circonférences données.

DÉTERMINATION DU SOMMET ET DES AXES PRINCIPAUX D'UN PARABOLOIDE;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Nous conserverons les notations et les relations données par M. Mention (*Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 209).

1. *Équation générale :*

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz + 2 B'' xy \\ \qquad + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + E = 0 \end{array} \right.$$

(axes quelconques).

2. *Équations d'un diamètre du paraboloïde.* Soient x', y', z' les coordonnées d'un point; les équations du diamètre passant par ce point sont

$$\frac{x - x'}{k} = \frac{y - y'}{k'} = \frac{z - z'}{k''}.$$

3. *Équations du plan polaire du point dont les coordonnés sont* x', y', z' :

$$\begin{array}{l} x (A x' + B'' y' + B' z' + C) \\ + y (B'' x' + A' y' + B z' + C') \\ + z (B' x' + B y' + A'' z' + C'') \\ + C x' + C' y' + C'' z' + E = 0. \end{array}$$

4. *Équations de l'axe principal diamètre.* En écri-

vant que le diamètre est perpendiculaire au plan polaire, ce diamètre devient l'axe principal intérieur. Or, d'après les relations connues, on a, pour établir cette perpendicularité, les équations

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{Ax' + B''y' + B'z' + C}{h} = \frac{B''x' + A'y' + Bz' + C'}{h'} \\ &\qquad = \frac{B'x' + By' + A''z' + C''}{h''}, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} h &= k + k'\cos xy + k''\cos xz, \\ h' &= k' + k\cos yx + k''\cos yx, \\ h'' &= k'' + k\cos cx + k'\cos zy. \end{aligned} \right.$$

Les équations (2) sont celles de l'axe principal si x', y', z' représentent des coordonnées courantes.

5. *Transformation de l'équation du paraboloïde.* Quand l'équation générale (1) représente une surface qui n'a pas de centre unique, elle prend une forme particulière sur laquelle seront fondés tous les calculs suivants.

On a les relations

$$\begin{aligned} Ak + B''k' + B'k'' &= 0, \\ A'k' + Bk'' + B''k &= 0, \\ A''k'' + B'k + Bk' &= 0, \end{aligned}$$

(t. XVI, p. 211).

(On sait que le déterminant $m = 0$.)

A l'aide de ces relations, éliminant A, A', A'' dans l'équation (1), on trouve

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{B''}{kk'}(k'x - ky)^2 + \frac{B'}{kk''}(k''x - kz)^2 \\ &+ \frac{B}{k'k''}(k'z - k''y)^2 - 2Cx - 2C'y - 2C''z - E = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce calcul est en défaut si l'on a $k = 0$. Alors l'équation précédente montre que l'on doit avoir en même temps $B'' = 0$ et $B' = 0$.

Les relations que nous avons écrites se réduisent à

$$A'k' + Bk'' = 0, \quad A''k'' + Bk' = 0,$$

et l'équation (1) devient

$$Ax^2 - \frac{B}{k'k''}(k'z - k''y)^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

Si de plus $k' = 0$, l'équation précédente ne peut subsister qu'en supposant $B = 0$. Mais la seconde des relations indiquées donne pour cette limite

$$\frac{Bk''}{k'} = -A,$$

et la troisième donne

$$A'' = 0;$$

on a donc

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

6. *Coordonnées du sommet.* Les équations (2), combinées avec l'équation (4) que nous supposerons accentuée, donnent les coordonnées du sommet.

A cet effet, entre les équations (2) éliminant y', observant que tous les termes qui contiennent le facteur hh se détruisent dans les coefficients de x' et de z', ainsi que dans le terme indépendant; enfin, supprimant le facteur commun h'', il reste

$$\begin{aligned} &x'[h(BB'' - A'B') + h'(B'B'' - AB) + h''(AA' - B''^2)] \\ &+ z'[h(B^2 - A'A'') + h'(A''B'' - BB') + h''(A'B' - BB'')] \\ &+ h(BC' - A'C'') + h'(B''C'' - BC) + h''(A'C - B''C') = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients de x' et de z' peuvent se modifier au

moyen des relations obtenues t. XVI, p. 210, et en remarquant que $m=0$. Alors le coefficient de x' sera

$$\frac{k''}{L}(hk+h'k'+h''k''),$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} &hk+h'k'+h''k'' \\ &= k^2+k'^2+k''^2+2kk'\cos xy \\ &\quad + 2kk''\cos xz + 2k'k''\cos yz = D^2. \end{aligned}$$

D est la diagonale du parallélipipède que l'on obtient en portant sur les axes à partir de l'origine les trois longueurs k, k', k''.

De même le coefficient de z' sera $\frac{K}{L}\cdot D^2$.

Si donc nous posons

$$R' = \frac{L[h(A'C''-BC')+h'(BC-B''C'')+h''(B''C'-A'C)]}{D^2},$$

ainsi que les valeurs analogues pour R et R'', il vient

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} k'z'-k''y' &= R, \\ k''x'-kz' &= R', \\ ky'-k'x' &= R''. \end{aligned} \right.$$

Ici R, R', R'' sont des quantités connues.

Transportant ces valeurs dans l'équation (4) accentuée, comme nous l'avons dit, on obtient

$$\frac{B''R''^2}{kk'}+\frac{B'R'^2}{kk''}+\frac{BR^2}{k'k''} = 2Cx'+2C'y'+2C''z'+E,$$

ou enfin

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} &k''B''R''^2+k'B'R'^2+kBR^2 \\ &= kk'k''(2Cx'+2C'y'+2C''z'+E) \end{aligned} \right.$$

En combinant cette dernière équation avec deux quel-

conques des équations (2), on a les valeurs x', y', z' des coordonnées du sommet, puisque toutes ces relations sont du premier degré.

7. Comme dans l'équation (6) l'expression

$$Cx' + C'y' + C''z'$$

est égale à une quantité connue, nous verrons, en combinant cette équation avec les équations (5), que le déterminant de x', y' et z' est

$$Ck + C'k' + C''k''.$$

Si donc

$$(7) \qquad Ck + C'k' + C''k'' = 0,$$

nous aurons un des cas particuliers que présentent les surfaces dénuées de centre, ou même une de celles qui ont une infinité de centres, car nous avons seulement supposé $m = 0$, ce qui n'exclut que les surfaces ayant un centre unique. Nous n'insisterons pas sur ces circonstances.

8. Dans le cas où l'on a

$$k = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0,$$

on verra directement, en comparant les relations correspondantes

$$A'k' + Bk'' = 0, \quad A''k'' + Bk' = 0$$

avec les équations (2) qui deviennent alors

$$\frac{Ax' + C}{h} = \frac{A'y' + Bz' + C'}{h'} = \frac{By' + A''z' + C''}{h''},$$

que x' est connu ainsi que $k'z' - k''y'$ en transportant

ces valeurs dans l'équation

$$Ax'^2 - \frac{B}{k'k''}(k'z' - k''y')^2 + 2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + E = 0,$$

on reconnaîtra que $C'y' + C''z'$ est aussi une quantité connue, et que le déterminant de y' et de z' est

$$C'k' + C''k'',$$

ce qui permettra encore de distinguer certains cas particuliers. En outre, on trouvera, après quelques réductions,

$$Ax' + C = \frac{h(C'k' + C''k'')}{h'k' + h''k''}.$$

Si les coordonnées sont rectangulaires, il reste

$$x = -\frac{C}{A},$$

car la supposition $k = 0$ donne alors

$$h = 0.$$

Enfin si l'on a de plus

$$k' = 0,$$

ce qui donne

$$B = 0,$$

les équations (2) deviennent

$$\frac{Ax' + C}{h} = \frac{A'y' + C'}{h'} = \frac{C''}{h''},$$

ce qui détermine x' et y' : il suffira donc de transporter ces valeurs dans l'équation

$$Ax'^2 + A'y'^2 + 2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + E = 0,$$

pour trouver z'.

9. *Équations des plans et des axes principaux.* En transportant dans l'équation du plan polaire les valeurs précédentes de x', y', z', on aura le plan tangent qui passe par le sommet, c'est-à-dire le plan principal extérieur.

On connaît déjà les équations de l'axe diamétral passant par le sommet. Pour avoir celles des deux autres axes, observons que l'équation en s (t. XVI, p. 215) se réduit alors au second degré, puisque $m = 0$ donne une racine nulle. De plus, les expressions

$$\mu = \frac{(s - A')(s\cos xz - B') - (s\cos yz - B)(s\cos xy - B'')}{(s\cos xy - B'')^2 - (s - A)(s - A')},$$

$$\nu = \frac{(s - A)(s\cos yz - B) - (s\cos xz - B')(s\cos xy - B'')}{(s\cos xy - B'')^2 - (s - A)(s - A')},$$

qui se déduisent facilement des deux premières formes du quotient s écrites à la page indiquée donnent pour les deux valeurs de s les valeurs correspondantes de μ et ν, et, par conséquent, les directions des axes extérieurs; comme ils passent par le sommet, on a donc leurs équations, qui feront connaître celles des plans principaux intérieurs.

SOLUTION DE LA QUESTION 337 (JULES VIEILLE)

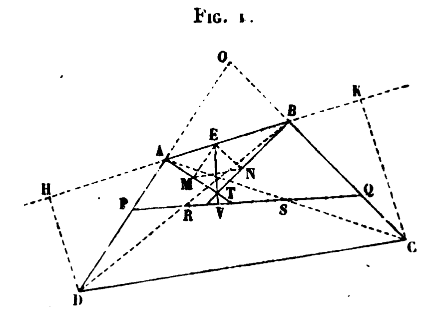
(voir t. XV, p. 290);

PAR M. LEGRANDAIS,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

Soit ABCD un quadrilatère quelconque; si par le point de concours T des perpendiculaires élevées de deux sommets consécutifs A et B sur les côtés opposés AD et BC

qui y aboutissent, on mène une perpendiculaire TE à la

Fig. 1.



droite RS qui joint les milieux des diagonales, cette perpendiculaire divise le côté AB en deux segments inversement proportionnels aux projections AH, BK des côtés AD et BC sur AB.

Il faut démontrer que

$$\frac{AE}{BE} = \frac{BK}{AH} \quad \text{ou} \quad AE.AH = BE.BK.$$

Du point E j'abaisse EM et EN perpendiculaires sur AT et BT. Les triangles rectangles AHD et AEM sont évidemment semblables et donnent

$$(1) \qquad \frac{AE}{AD} = \frac{EM}{AH}.$$

De même, les triangles semblables ENB, BCK donnent

$$(2) \qquad \frac{BE}{BC} = \frac{EN}{BK}.$$

Divisant membre à membre l'équation (1) par l'équation (2), on a

$$\frac{AE}{BE} \times \frac{BC}{AD} = \frac{BK}{AH} \times \frac{EM}{EN},$$

donc la question revient à démontrer que

$$\frac{BC}{AD}=\frac{EM}{EN}.$$

Je prolonge la ligne RS jusqu'à sa rencontre en P et Q avec AD et BC.

L'angle ETM = OPQ, car ces deux angles ont même supplément ATV.

Mais le quadrilatère EMTN est inscriptible, donc

$$ETM = ENM = OPQ.$$

De plus

$$POQ = MEN,$$

donc les deux triangles EMN, OPQ sont semblables et

$$\frac{EM}{EN}=\frac{OQ}{OP}:$$

ainsi il faut démontrer que

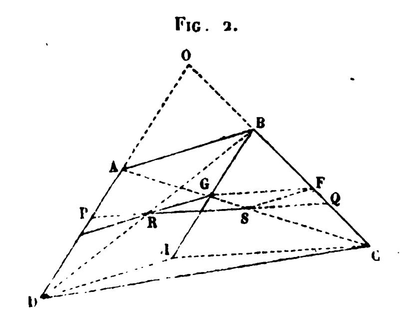
$$\frac{OP}{OQ}=\frac{BC}{AD}.$$

Pour démontrer cette proposition, je mène par le point B, BI égal et parallèle à AD; donc

$$DI = AB.$$

Je dis que la ligne IC est parallèle à PQ.

Fig. 2.



En effet, si par le point R, milieu de BD, et par le point S, milieu de AC, je mène RG et SF parallèles à AB, ces lignes seront égales comme moitiés de AB, et la figure RGFS sera un parallélogramme; mais la ligne GF est parallèle à IC, car elle joint les milieux G et F de BI et de BC. Donc IC est parallèle à RS et les deux triangles OPQ et BIC étant semblables, on a

$$\frac{BC}{BI}=\frac{OQ}{OP} \quad \text{ou} \quad \frac{BC}{AD}=\frac{OQ}{OP}.$$

C. Q. F. D.

EXTRACTION ABRÉGÉE DE LA RACINE CARRÉE;

Par M. E. CATALAN.

C'est à tort qu'on attribue cette méthode à Wantzel (*Bulletin*, t. III, p. 11); elle appartient à M. Gergonne.

Puisque l'occasion s'en présente, je donnerai ici une seconde règle, un peu plus rapide que celle de M. Gergonne (dont elle dérive) et que j'ai enseignée à Sainte-Barbe, il y a quinze à vingt ans.

Déterminez, à l'ordinaire, les *deux* premiers chiffres de la racine; carrez et retranchez. Abaissez les *deux* chiffres suivants; séparez le *dernier*; divisez la partie à gauche par le double de la racine trouvée : vous aurez le *troisième* chiffre de la racine. *Carrez ce troisième chiffre* et retranchez du reste de la division suivi du chiffre négligé. Abaissez les *quatre* chiffres suivants, séparez les *deux* derniers; divisez la partie à gauche par le double de la racine trouvée; vous aurez *deux* chiffres de plus. Formez le carré de cette nouvelle partie de la racine; retranchez-le du reste de la division suivi des *deux* chiffres négli-

gés, etc. En continuant de la même manière, vous obtiendrez encore *quatre* chiffres de plus, puis *huit*, puis *seize*, *etc.*

Note du Rédacteur. M. Gergonne énonce cette méthode dans une Note à la fin d'un Mémoire de Bobillier (*Annales*, t. XX, p. 127), et M. Gergonne dit que sa méthode peut s'étendre à tous les exposants, comme celle de Bobillier dont l'énoncé est renfermé dans ce théorème :

Si, cherchant la racine m[ième] *d'un nombre entier, on a déjà obtenu un nombre de chiffres qui soit au moins égal au nombre de ceux qui restent à trouver augmenté du nombre d'unités de l'exposant, on obtiendra le superflu de la racine cherchée à moins d'une demi-unité près, en divisant simplement le reste de l'opération par* m *fois la* (m — 1)[ième] *puissance de la racine déjà obtenue et négligeant le reste de cette division.*

(*Voir* pour la racine cubique, *Nouvelles Annales*, t. III, p. 334, 1844, MIDY; t. X, p. 86, 1851, NIEVENGLOSKY.)

Remarquons en passant que ces méthodes abrégées de calcul sont à l'usage de personnes qui ne calculent pas. Les calculateurs de profession emploient les logarithmes. Partout les locomotives sont préférables aux carrioles. Car *ars longa, vita brevis* (*).

CONIQUES. THÉORÈMES SUR LES POLAIRES.

Théorème (*ellipse*). Du pôle d'une droite on abaisse

(*) Les Tables de Crelle (1857) donnant les produits tous faits de trois chiffres par trois chiffres sont d'une commodité extrême.

une perpendiculaire sur cette polaire; si sur la partie du petit axe de l'ellipse interceptée par cette perpendiculaire et la polaire, on décrit comme diamètre une circonférence, elle passe par le pied de la perpendiculaire et par les deux foyers.

Dans l'hyperbole, on prend l'axe non-focal.

Corollaire. Les droites menées du pied de la perpendiculaire aux deux foyers sont également inclinées sur la polaire (*).

Théorème. Etant données deux surfaces du second degré ayant les mêmes foyers (**), si l'on mène un plan tangent à l'une de ces surfaces, la perpendiculaire à ce plan, élevée au point de contact, passe par le pôle du plan pris par rapport à la seconde surface.

SUR LES OVALES DE DESCARTES;

PAR M. STREBOR.

On sait depuis longtemps, d'après M. Chasles, que si deux paraboles ayant même foyer et passant respectivement par deux points fixes, s'entrecoupent toujours sous un angle donné, leur intersection décrira un limaçon, variété particulière des ovales cartésiens. Ces dernières courbes peuvent s'engendrer dans toute leur généralité par une construction semblable, savoir :

Soient deux paraboles ayant même foyer et s'entrecoupant toujours sous le même angle, qui touchent toutes

---

(*) On n'insérera pas de démonstration de ce théorème.

(**) On entend par là les foyers des trois sections principales au nombre de six dans l'ellipse, quatre sur le grand axe et deux sur le moyen axe. *Homofocale* est une expression hybride. Il vaudrait mieux dire *confocale*.

deux une ellipse dont un des foyers coïncide avec celui des paraboles. Les points d'intersection de toutes les paires de paraboles qui satisfont à cette condition décriront d'une manière générale un ovale de Descartes.

DU PRODUIT DE PLUSIEURS NOMBRES CONSÉCUTIFS;

PAR M. EMILE MATHIEU.

THÉORÈME. *Le produit de plusieurs nombres consécutifs*

$$(\alpha) \qquad n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)$$

ne peut être une puissance parfaite, si le nombre des facteurs est $> n-4$; *autrement dit si* p *est* $> n-5$.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur un théorème énoncé par M. Bertrand et démontré par M. Tchébichef.

Si n est un nombre entier > 7, il y a au moins un nombre premier compris entre $n-2$ et $\frac{n}{2}$.

D'après cela, il existera un nombre premier compris entre $n+p+1$ et $\frac{n+p+3}{2}$. Donc dans le produit (α), il existera un facteur θ qui sera premier, si $n-1$ est $<\frac{n+p+3}{3}$, ou si n est $< p+5$ ou encore si p est $> n-5$. Or le produit (α) ne peut contenir le carré de θ, attendu que 2θ est $> n+p$; on a en effet

$$\theta > \frac{n+p+3}{2},$$

d'où

$$2\theta > n+p+3.$$

Le produit (α) contient le nombre premier θ, il n'est pas divisible par son carré : il ne peut donc être une puissance parfaite.

Dans cette démonstration, on suppose $n+p+1>7$ ou $n+p+1<7$; mais il est facile de vérifier le théorème lorsque $n+p$ est inférieur à 7; la proposition est donc démontrée.

Cela posé, il m'a été facile de vérifier que le produit de plusieurs nombres consécutifs

$$n(n+1)\ldots(n+p)$$

ne peut être une puissance parfaite, toutes les fois que le nombre n n'est pas supérieur à 100.

Cette vérification se fait très-rapidement, si l'on remarque que p étant $<n-4$, il est impossible que le produit (α) soit une puissance parfaite : 1° si l'un des facteurs de ce produit est un nombre premier, ce qui a déjà été établi par MM. Liouville et Gerono lorsque le premier facteur est 1 ; 2° si l'un des facteurs est divisible par un nombre premier $R>p$ sans être divisible par R^2 (*).

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE);

Des relations qui existent entre les coefficients des termes de l'équation générale :

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy+2cx+2c'y+2c''z+d=0,$$

quand cette équation représente un cylindre parabolique.

Tous les plans diamétraux du cylindre parabolique sont

(*) M. Liouville a donné le théorème général, 1857, p. 277. TM.

parallèles entre eux; le cylindre parabolique est la seule surface du second degré qui ait cette propriété : on obtiendra donc les relations cherchées en exprimant que l'équation générale des plans diamétraux

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (am + b''n + b')x + (b''m + a'n + b)y \\ \quad + (b'm + bn + a'')z + cm + c'n + c'' = 0 \end{array} \right.$$

représente des plans parallèles, quelles que soient les valeurs attribuées aux coefficients angulaires m, n, des cordes conjuguées.

Pour que cette condition soit remplie il faut que les rapports des coefficients des variables x, y, z, dans l'équation (1), soient indépendants des quantités m et n. Ces rapports ont pour expressions

$$\frac{am + b''n + b'}{b''m + a'n + b}, \quad \frac{am + b''n + b'}{b'm + bn + a''};$$

il faut donc qu'on ait

$$\frac{a}{b''} = \frac{b'}{b}, \quad \frac{b''}{a'} = \frac{b'}{b}, \quad \frac{a}{b'} = \frac{b''}{b}, \quad \frac{b''}{b} = \frac{b'}{a''};$$

d'où

$$(2) \qquad a = \frac{b'b''}{b}, \quad a' = \frac{bb''}{b'}, \quad a'' = \frac{bb'}{b''}.$$

Telles sont les relations cherchées. On voit qu'elles sont au nombre de trois; on peut en conclure que le nombre des conditions nécessaires pour la détermination d'un cylindre parabolique est *six*.

Remarque. Les relations (2) donnent :

$$a\,a'\,a'' = b\,b'\,b'',$$

et

$$b\,b'\,b'' = ab^2 = a'\,b'^2 = a''\,b''^2,$$

et par suite

$$ab^2 + a'\,b'^2 + a''\,b''^2 - a\,a'\,a'' - 2\,b\,b'\,b'' = 0,$$

égalité qui doit, en effet, avoir lieu, puisque la surface n'a pas de centre.

Des relations (2) donnent anssi :

$$b''^2 = aa', \quad b'^2 = aa'', \quad b^2 = a'a'',$$

et ces dernières égalités montrent que les trois sections de la surface par les plans coordonnés sont du genre des paraboles, ce qui est encore une vérification.

G.

OBSERVATIONS RECTIFICATIVES

Sur le cercle coupant orthogonalement trois autres cercles ;

PAR M. E. LAQUIÈRE,
Élève du lycée Saint-Louis.

1°. Le cercle qui coupe orthogonalement trois autres cercles jouit d'une double propriété. Les trois polaires de chaque point de la circonférence par rapport aux trois cercles se coupent en un même point, et ce point d'intersection est encore sur le cercle; cette dernière propriété est une conséquence d'une évidence géométrique et subsiste même pour trois coniques quelconques, lorsque le lieu du point est une ligne du troisième degré. Or, au t. V, p. 121, 1846, on lit que le lieu du point d'intersection est du quatrième degré, ce qui est erroné. L'analyse mène à une équation du second degré; en effet, on lit en cet endroit que les équations des trois cercles, rapportées au centre radical comme origine des coordonnées, sont

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + 2\beta y + \gamma^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha'' x + 2\beta'' y + \gamma^2 = 0.$$

ce qui est très-juste. Les équations des trois polaires du point x, y sont donc

$$(x-\alpha)X+(y-\beta)Y=\alpha x+\beta y+\gamma^2,$$
$$(x-\alpha')X+(y-\beta')Y=\alpha' x+\beta' y+\gamma^2,$$
$$(x-\alpha'')X+(y-\beta'')Y=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma^2,$$

où **X**, **Y** sont les coordonnées courantes. De là on déduit

$$(\alpha-\alpha')X+(\beta-\beta')Y=(\alpha'-\alpha)x+(\beta'-\beta)y,$$
$$(\alpha-\alpha'')X+(\beta-\beta'')Y=(\alpha''-\alpha)x+(\beta''-\beta)y,$$

d'où évidemment

$$X=-x,\quad Y=-y.$$

Substituant dans l'une quelconque des trois dernières équations, on trouve

$$x^2+y^2-\gamma^2=0,$$

équation du cercle.

Note du Rédacteur. La correction de M. Laquière est très-juste. Une inadvertance et une faute de calcul m'ont fait parvenir à une équation du quatrième degré (*voir* t. XVI, p. 268). La proposition a été primitivement démontrée par J.-B. Durrande. Elle est ainsi formulée :

La circonférence du cercle décrit du centre radical de trois cercles comme centre et avec un rayon égal à la tangente menée de ce centre à l'un d'eux, est à la fois le lieu géométrique des points du plan des trois cercles dont les polaires relatives à ces trois cercles concourent en un même point et le lieu géométrique du point de concours des trois polaires, et ces deux points sont constamment aux extrémités d'un même diamètre de ce cercle (*Annales* de Gergonne, t. XVI, p. 112; 1825).

Ce théorème est suivi d'un autre analogue pour quatre sphères. En général, lorsque dans un système d'équations entre des coordonnées courantes et des coordonnées fixes, il y a symétrie entre les unes et les autres, le résultat de l'élimination reste le même en rendant fixes les coordonnées courantes et rendant courantes les coordonnées fixes : c'est ce qui a lieu pour les équations des trois lignes polaires ci-dessus, et aussi pour les équations des quatre plans polaires avec des sphères.

NOTE SUR UNE CONIQUE ET SON CERCLE DIRECTEUR ;

PAR M. E. LEMOINE,
Élève en Spéciales du Prytanée impérial de la Flèche.

---

1. *Lemme.* Soient A, B, C un triangle inscrit dans un cercle, O le centre et H le point de concours des trois hauteurs. Prolongeons la droite AH jusqu'à ce qu'elle rencontre derechef le cercle au point L ; on démontre facilement que le côté BC passe par le milieu de HL.

2. Construisons une conique ayant pour foyers les deux points O et H et pour grand axe le rayon du cercle O qui devient le cercle *directeur* de la conique. Le point L étant sur ce cercle, H étant un foyer et la droite BC étant perpendiculaire à HL et passant par son milieu, il s'ensuit que BC *touche* la conique au point où ce côté est coupé par le rayon OL ; par les mêmes raisons, les côtés AB, AC *touchent* la conique ; donc cette conique est inscrite dans le triangle ABC ; or lorsqu'un triangle et même un polygone quelconque est à la fois inscrit dans une conique et circonscrit à une seconde conique, il

existe une infinité de polygones doués de la même propriété. (Poncelet.)

On a donc le théorème qui suit.

3. Théorème. *Si deux côtés d'un triangle inscrit dans un cercle directeur touchent la conique, le troisième côté la touchera également; un de ces triangles est tel, que le point de concours de ses trois hauteurs coïncide avec le second foyer.*

4. Il y a trois cas.

1°. Le triangle est *acutangle*. Les deux points H et O sont alors dans l'intérieur et la conique est une ellipse qui devient le cercle inscrit lorsque le triangle est équilatéral.

2°. Le triangle est *rectangle*. La conique dégénère en une droite qui va du sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse.

3°. Le triangle est *obtusangle*. Les deux points H et O sont hors du triangle et la conique est une hyperbole.

5. Tout point de la conique est également distant du centre du cercle directeur et de la circonférence de ce cercle : propriété qui subsiste aussi dans la parabole où le cercle directeur devient la droite directrice; le triangle ABC se confond avec cette droite, et il n'y a pas lieu au théorème ci-dessus.

Note du Rédacteur. M. Blum a fait voir par une construction mécanique ingénieuse comment les cercles directeurs et les droites directrices peuvent servir à décrire les coniques (t. II, p. 60; 1843); de là l'origine du nom. Je crois que le nom de *directrice* paraît pour la première fois dans le *Traité des Coniques* de l'Hôpital. Ne pourrait-on pas, par une construction mécanique et à l'aide des plans *directeurs*, décrire les surfaces du second degré?

PROPRIÉTÉS FOCALES DES SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE;

D'APRÈS HEILERMANN, DE COBLENTZ,

(*Monat. Bericht.* Berlin, avril 1858.)

1. THÉORÈME. *Par un point quelconque d'un ellipsoïde passent deux lignes de courbure et deux plans osculateurs à ces lignes; ces plans coupent le grand axe en deux points* P *et* Q; *prenons sur ce même axe deux points* F *et* F' *à égale distance du centre, tels, que les quatre points* F, P, Q, F' *forment une relation* harmonique; *les points* F *et* F' *sont* fixes, *quel que soit le point de l'ellipsoïde. Nommons ces points* focaux.

2. Si par les points F et F' et par l'intersection des deux plans osculateurs on mène deux plans, les angles qu'ils forment entre eux sont partagés en parties égales par les plans osculateurs.

3. Les normales à la surface menées par les ombilics coupent le grand axe aux deux points focaux F et F'.

4. Deux sphères qui ont pour rayons ces normales et pour centre F et F' sont égales et touchent la surface aux ombilics; elles sont les *sphères focales*.

5. Une tangente menée à l'une quelconque de ces sphères par un point de la surface est un *rayon focal.*

6. Un hyperboloïde confocal coupe l'ellipse suivant une ligne de courbure, et *vice versâ* chaque ligne de courbure est l'intersection de l'ellipsoïde avec un hyperboloïde confocal. Le plan polaire d'un foyer pris par rapport à cet hyperboloïde est nommé *plan directeur*. La distance des deux points focaux, divisée par l'axe transverse de l'hy-

perboloïde, est dite l'*excentricité* de la ligne de courbure.

7. Théorème. *Pour un point quelconque d'une ligne de courbure, le rayon focal, mené toujours à la même sphère focale, étant divisé par la distance du point au plan directeur, donne pour quotient l'excentricité de la ligne de courbure.*

8. Théorème. *Pour tous les points d'une ligne de courbure, et selon qu'elle appartient à l'un ou à l'autre système, la somme ou la différence des rayons focaux menés aux deux sphères focales est constante.*

9. Il existe aussi deux foyers sur le petit axe et deux autres imaginaires sur l'axe moyen, et sont doués des mêmes propriétés.

10. En prenant les carrés des trois axes principaux dans les surfaces à centre, le plus grand carré désigne le grand axe, le plus petit carré le petit axe, et le carré moyen le moyen axe; ainsi compris, on a les mêmes propriétés sur toutes les surfaces du deuxième ordre à centre.

Note. Ces importants théorèmes ne sont qu'énoncés; l'auteur publiera les démonstrations; ils sont analogues aux remarquables théorèmes de M. l'abbé Sauze (p. 35 et 36), et que M. Chasles a découverts en 1838 par une autre voie (*Nouvelles Annales*, t. VI, p. 230).

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir page 209);

Par M. VANNSON.

Problème. *Déterminer les foyers dans une courbe sphérique du second degré, la courbe étant rapportée à son centre et à ses axes.*

Nous appellerons *foyer* un point tel, que la tangente de sa distance δ, à un point quelconque de la courbe, soit une fonction rationnelle de l'abscisse du point, de la forme $\frac{nx+p}{1+n'x}$. Si nous appelons x' et y' les tangentes des coordonnées du point inconnu, nous aurons

$$\tang \delta = \frac{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2+(yx'-y'x)^2}}{1+yy'+xx'},$$

Le dénominateur étant rationnel, il faut que le numérateur le soit; d'où l'on conclura comme sur un plan que y' doit être nul, et si on remplace y^2 par sa valeur tirée de l'équation de la courbe, la quantité qu'on trouvera sous le radical devra être un carré, ce qui donne

$$x'^2 = \frac{a^2-b^2}{1+b^2};$$

d'où il résulte qu'on doit avoir

$$a^2 > b^2.$$

Si on désigne par γ la distance du centre au foyer, et par α et β les deux demi-axes, on tire de l'équation précédente

$$\cos\gamma = \frac{1+b^2}{1+a^2} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta};$$

les foyers s'obtiennent donc comme pour l'ellipse plane, en construisant un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse et un côté. Quant à l'expression de $\tang \delta$, elle devient, en appelant c la tangente de l'arc γ,

$$\tang \delta = \frac{a-\frac{cx}{a}}{1+cx},$$

et si on pose

$$\frac{cx}{a} = \tang \varphi,$$

on trouve

$$\text{tang}\,\delta = \text{tang}\,(\alpha - \varphi),$$

ou

$$\delta = \alpha - \varphi.$$

Si on appelle δ' la distance du point de la courbe à l'autre foyer, on aura

$$\delta' = \alpha + \varphi;$$

donc

$$\delta + \delta' = 2\alpha.$$

On a aussi

$$\text{tang}\,\frac{\delta' - \delta}{2} = \varphi;$$

d'où l'on voit qu'on a

$$\text{tang}.\left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right) = \frac{cx}{a}.$$

On peut se proposer le problème inverse, c'est-à-dire chercher le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à deux points fixes soit constante; on retombe sur l'équation de l'ellipse.

Quand la courbe n'est pas rapportée à ses axes, on appelle *foyer* un point tel, que la tangente de sa distance (δ) à un point quelconque de la courbe est une fonction rationnelle des tangentes des coordonnées de ce point, de la forme $\frac{my + nx + p}{m'y + n'x + 1}$; d'après l'expression trouvée pour tang δ, on doit donc avoir

$$(my + nx + p)^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2 + (yx' - y'x)^2.$$

Cette équation devant avoir lieu pour tous les points de la courbe, est identique à l'équation de la courbe, ce qui donne cinq relations pour déterminer les cinq inconnues m, n, p, x', y'. On peut prendre des coefficients quel-

conques ; mais, pour abréger le calcul et la discussion, nous supposerons la courbe rapportée à son centre intérieur, ce qui donnera

$$D = E = o \quad \text{et} \quad B^2 < 4AC,$$

d'où

$$F < o,$$

pour qu'il y ait une courbe réelle. Les équations à résoudre seront donc

$$(1) \qquad mp + y' = o, \quad np + x' = o,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{m^2 - x_1^2 - 1}{A} = \frac{n^2 - y_1^2 - 1}{C} \\ &= \frac{2(mn + y'x')}{B} = \frac{p^2 - x_1^2 - y_1^2}{F}; \end{aligned} \right.$$

les deux premières donnent

$$y' = -mp, \quad x' = -np;$$

d'où

$$\frac{y'}{x'} = \frac{m}{n}.$$

Ce qui fait voir déjà que les points démandés sont sur la circonférence d'un grand cercle passant par le centre et perpendiculaire au cercle qui aurait pour équation

$$my + nx + p = o.$$

Cette circonférence, contenant les points demandés, sera connue quand nous aurons calculé le rapport $\frac{m}{n}$. On tire aussi des équations

$$(1) \qquad x_{\prime}^2 + y_{\prime}^2 = p^2(m^2 + n^2),$$

ce qui place les points demandés sur un second cercle

concentrique à la courbe, et qui sera connu quand nous aurons trouvé p^2 et $m^2 + n^2$.

Pour avoir le rapport $\frac{m}{n}$, je remplace dans les équations (2) x' et y' par leurs valeurs, ce qui donne

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{m^2 - n^2p^2 - 1}{A} = \dfrac{n^2 - m^2p^2 - 1}{C} \\ = \dfrac{2mn(1+p^2)}{B} = \dfrac{p^2(1 - m^2 - n^2)}{F}. \end{array} \right.$$

Si je divise dans les deux premiers rapports la différence des numérateurs par celle des dénominateurs, j'aurai un rapport que je pourrai égaler au troisième, j'aurai donc

$$\frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{2(A - C)}{B};$$

posant

$$\frac{m}{n} = z,$$

j'aurai l'équation

$$z^2 - 2\frac{(A - C)}{B}z - 1 = 0.$$

Il faut choisir celle des valeurs de z qui convient à la question; or nous avons $B^2 < 4AC$, d'où il est aisé de conclure que $1 - m^2 - n^2$ est positif, et, d'après le signe de F, que le produit mn est de signe contraire à celui de B; il en sera de même pour $\frac{m}{n}$. Ainsi il faut prendre celle des valeurs de z qui est de signe contraire avec B. Soit, pour fixer les idées, $B < 0$, nous prendrons la racine positive; et, si nous supposons $A < C$, ce sera la plus grande: elle sera donc supérieure à 1; soit α cette racine, nous aurons $m = n\alpha$. Maintenant l'égalité des deux pre-

miers rapports (3) nous donne

$$p^2 = \frac{(m^2 - 1)C - (n^2 - 1)A}{Cn^2 - Am^2}:$$

portant cette valeur dans l'équation formée par le premier et le dernier rapport, et posant $m = n\alpha$, nous obtenons

$$n^2 = \frac{C - A}{\alpha^2(C - F) - (A - F)},$$

expression évidemment positive ; d'où

$$m^2 = \frac{\alpha^2(C - A)}{\alpha^2(C - F) - (A - F)} \quad \text{et} \quad p^2 = \frac{F(\alpha^2 - 1)}{C - A\alpha^2}.$$

Pour que cette dernière expression soit positive, il faut qu'on ait

$$\alpha^2 > \frac{C}{A} \quad \text{ou} \quad \alpha > \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}},$$

condition qui est satisfaite; car si nous remplaçons dans l'équation qui donne z, cette lettre par $\sqrt{\frac{C}{A}}$, nous obtenons un résultat négatif; donc $\sqrt{\frac{C}{A}}$ tombe entre les deux racines, la positive ou α est donc plus grande que $\sqrt{\frac{C}{A}}$.

Déterminer la directrice dans une courbe quelconque du second degré. Si nous appelons δ' la distance d'un point quelconque de la courbe à la circonférence qui a pour équation

$$my + nx + p = 0,$$

nous aurons, d'après une des formules précédentes,

$$\sin\delta = \frac{my + nx + p}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Nous avons déjà pour la distance du même point de la courbe au foyer

$$\sin\delta = \frac{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2+(yx'-y'x)^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x_1^2+y_1^2}};$$

d'où

$$\frac{\sin\delta'}{\sin\delta} = \frac{\sqrt{1+x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

quantité constante.

Donc, étant donnée une courbe sphérique du second degré et un de ses foyers, on peut trouver une circonférence de grand cercle telle, que les sinus des distances d'un point de la courbe à cette circonférence et au foyer donné soient dans un rapport constant. On aura donc deux directrices correspondantes chacune à chaque foyer, et, pour avoir l'équation d'une directrice, il suffit d'égaler à zéro le numérateur de la fraction rationnelle qui donne la tangente de la distance d'un point au foyer. Ainsi, quand la courbe est rapportée à ses axes, on trouve

$$\text{tang}\,\delta = \frac{a-\frac{cx}{a}}{1+cx}.$$

L'équation d'une des directrices est donc

$$x = \frac{a^2}{c};$$

ce qui montre que la directrice est la polaire du foyer, comme on peut le démontrer aussi sur l'équation générale. Pour obtenir géométriquement la directrice, il suffira donc d'élever par le foyer un arc perpendiculaire à l'axe jusqu'à la rencontre du cercle principal, de mener à ce cercle par le point de rencontre un arc tangent, qu'on prolongera jusqu'à l'axe; on aura ainsi le pied de la di-

rectrice, ce qui suffira pour la déterminer. L'expression de tang δ donne encore

$$p = a, \quad m = 0, \quad n = -\frac{c}{a};$$

donc on aura

$$\frac{\sin\delta'}{\sin\delta} = \frac{\sqrt{1+c^2}}{\sqrt{a^2+\frac{c^2}{a^2}}} = \frac{a\sqrt{1+c^2}}{c\sqrt{1+\frac{a^4}{c^2}}} = \frac{\text{tang}\,\alpha\cos\varphi}{\sin\gamma},$$

en appelant φ la distance du centre à la directrice, γ celle du centre au foyer, et α le demi-axe des foyers.

THÉORÈME. *Si une circonférence de grand cercle coupe la courbe en deux points* A *et* B, *et si on la prolonge jusqu'à la rencontre de la directrice en* C, *l'arc qui joindra le point* C *au foyer* F *correspondant à cette directrice, divisera en deux parties égales l'angle extérieur du triangle* ABP.

Se démontre comme sur un plan.

Corollaire. Si l'arc qu'on prolonge jusqu'à la directrice est tangent à la courbe au point A, l'angle AFC sera droit; d'où il résulte que la polaire d'un point C de la directrice passe au foyer, et fait un angle droit avec l'arc qui joint le point C au foyer. De là un moyen graphique de mener une tangente à la courbe par un point de son contour, et aussi par un point quelconque. En effet, soit A ce point; supposons le problème résolu et soient m et n les points où la polaire de A coupe les deux directrices, joignons A au foyer F, et concevons cet arc prolongé jusqu'à ce qu'il coupe la directrice correspondante; soit D le point de rencontre, les trois points A, F, D étant sur une même circonférence, leurs polaires passent au même point; or la polaire du foyer est la directrice, et la polaire du point D est une circonférence menée par F per-

pendiculairement à l'arc AFD : donc la rencontre de cet arc avec la directrice donnera le point *n*. Le point *m* se trouvera de même, en joignant A au deuxième foyer F', et en menant sur AF' un arc perpendiculaire prolongé jusqu'à la deuxième directrice; on joindra ensuite les points *m* et *n* par un arc de grand cercle qui sera en général la polaire du point A. Les points de contact seront à l'intersection de cette circonférence polaire avec la courbe. Si la courbe n'est pas tracée et qu'on connaisse ses foyers et l'axe, on pourra trouver les deux points de rencontre géométriquement.

PROBLÈME. *Étant donnés un foyer, sa directrice et un point* A, *construire la courbe.*

Si du foyer F nous abaissons sur la directrice un arc perpendiculaire coupant la directrice au point *m*, nous aurons ainsi la direction de l'axe; pour trouver les sommets, abaissons du point A une perpendiculaire sur la directrice, soit P son pied. Menons la bissectrice AD de l'angle PAF; le point D divisera l'arc FB en deux parties, dont les sinus seront comme sinus AP est à sinus AF. Pour avoir un sommet, il suffit donc de diviser l'arc F*m* de la même manière. Pour cela, il faut prendre à partir du milieu I de *m*P un arc IH d'un quadrant, et joindre H au point D, la rencontre de l'arc HD avec l'axe sera un des sommets; faites la même construction après avoir tracé la bissectrice extérieure au sommet A du triangle PAD, vous aurez le second sommet de la courbe.

PROBLÈME. *Étant donnés un foyer* F *et trois points* A, B, C *d'une conique sphérique, la construire.*

La construction géométrique qu'on emploie sur un plan s'applique sur la sphère et donne quatre solutions. Nous allons indiquer la solution analytique. Si nous prenons le foyer comme origine des coordonnées et des axes

rectangles, l'équation de la courbe sera

$$x^2 + y^2 = (my + nx + p)^2,$$

m, n, p sont les inconnues. Soient α et β les tangentes des coordonnées du premier point, et δ la tangente de sa distance au foyer, etc., nous aurons les trois équations

$$\pm \delta = m\beta + n\alpha + p,$$
$$\pm \delta' = m\beta' + n\alpha' + p,$$
$$\pm \delta'' = m\beta'' + n\alpha'' + p.$$

Prenons d'abord les signes supérieurs, nous aurons facilement m, n et p, sous la forme

$$A\delta + B\delta' + C\delta'' \ldots.$$

Si nous prenons les doubles signes pour δ' et δ'' seulement, nous aurons quatre systèmes de valeurs pour m, n, p. Quant à prendre le double signe pour δ, cela reviendrait à changer à la fois les signes de m, de n et de p, ce qui donne les mêmes directrices et par suite les quatre mêmes courbes.

Lemme I. *Étant donnés deux points* A *et* B, *trouver le lieu du point* M *tel, que l'angle* AMB *soit droit.*

Prenons pour origine le point milieu de l'arc AB, appelons $2a$ la distance AB que je supposerai moindre qu'un quadrant, z la latitude de m et x sa longitude ou son abscisse, nous avons par une propriété connue du triangle rectangle

$$\sin^2 z = \operatorname{tang}(a + x) . \operatorname{tang}(a - x).$$

C'est l'équation du lieu, mais il faut quelques transformations pour reconnaître la nature de la courbe. On a d'abord

$$\sin^2 z = \frac{\operatorname{tang}^2 a - \operatorname{tang}^2 x}{1 - t^2 a \operatorname{tang}^2 x};$$

de là

$$\tang^2 z\,(1 - \tang^2 a) + \sin^2 x = \cos^2 x \tang^2 a;$$

si nous projetons l'arc z sur l'axe des y et que nous appelions Y la tangente de la projection, nous trouverons

$$\frac{\tang^2 y}{\left(\frac{\sin^2 a}{\cos 2a}\right)} + \frac{X^2}{\tang^2 a} = 1,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{Y^2}{6^2} + \frac{X^2}{\alpha^2} = 1,$$

en posant

$$\frac{\sin^2 a}{\cos 2a} = 6^2, \quad \text{et} \quad \tang a = \alpha.$$

C'est donc une ellipse sphérique; les foyers se trouvent sur l'axe des y.

Remarque. Si on prend pour origine le point A, on arrive plus simplement encore au résultat qui est

$$x^2 + y^2 - Ax = 0.$$

A exprime la tangente de l'arc donné AB.

Lemme II. *Étant donnés deux points* A *et* B, *trouver le lieu du point* m *tel, que les sinus des distances de* m *à* A *et à* B *soient dans un rapport donné.*

Ce problème, comme dans la géométrie plane, se ramène au précédent. Le lieu est donc une ellipse sphérique.

Problème. *Étant donnés la directrice d'une conique sphérique et deux points* A, B, *trouver le lieu du foyer.*

Ce problème se ramène facilement à trouver le lieu des points tels, que les sinus de leurs distances aux points donnés soient comme les sinus des distances de chaque point à la directrice. Le lieu est donc une ellipse dont l'axe est dirigé suivant l'arc AB; une extrémité de cet axe

est à la rencontre C de l'arc AB prolongé jusqu'à la directrice. On peut trouver l'autre extrémité par la construction suivante : Abaissez des points A, B les arcs AA', BB' perpendiculaires à la directrice; soit O leur rencontre; joignez le point O à la rencontre des diagonales du quadrilatère ABA' B' par un arc coupant AB en un point D; les quatre points C, A, D, B sont harmoniques; donc on a

$$\frac{\sin \mathrm{AD}}{\sin \mathrm{BD}} = \frac{\sin \mathrm{AC}}{\sin \mathrm{BC}} = \frac{\sin \mathrm{AA}'}{\sin \mathrm{BB}'}.$$

Donc le point D est un point du lieu demandé; il en est de même de sa projection D' sur la directrice. On pourra trouver le second axe géométriquement au moyen de cette propriété évidente du cercle principal : les tangentes des ordonnées de deux points correspondants dans la courbe et le cercle principal sont comme les tangentes des deux demi-axes de la courbe.

Problème. *Etant donnés la directrice et trois points, construire la courbe.*

Ce problème, d'après ce qui précède, se ramènera à construire deux ellipses dont l'intersection donnera le foyer. Si l'on voulait le résoudre par l'analyse, on pourrait prendre la directrice pour axe des y, et l'équation de la courbe serait

$$n^2 x^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2 + (yx' - y'x)^2,$$

x', y' désignant les tangentes des coordonnées du foyer. Les coordonnées des trois points devant vérifier cette équation, on serait conduit à résoudre trois équations à trois inconnues, n s'élimine immédiatement, et il reste deux équations du second degré entre x' et y' dont chacune représente une des ellipses ci-dessus indiquées.

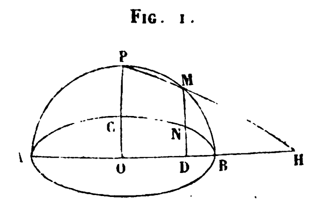
Propriétés de l'ellipse rapportée à ses axes. On a vu

qu'elle avait pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Si sur AB comme diamètre on décrit un cercle qu'on appel-

Fig. 1.



lera *cercle principal*, on aura, entre les ordonnées Y et y de ce cercle et de l'ellipse correspondantes à une même abscisse, la relation

$$\frac{Y}{y} = \frac{a}{b}.$$

Cette relation a également lieu pour les arcs latitudes des deux points ou leurs projections sur l'axe des y. De là résulte un moyen de construire l'ellipse par points quand on connaît ses axes. On mènera par un point M quelconque du cercle principal l'ordonnée MD; on joindra P et M par un arc de grand cercle qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de l'axe AB en H; on joindra CH par un arc qui coupera l'ordonnée MD en un point N. Ce point appartiendra à la courbe.

Si l'on joint deux points M, N de l'ellipse par un arc de grand cercle et les points correspondants du cercle principal par un second arc M', N', ces deux arcs viendront couper l'axe commun au même point. Si les deux points M et N sont supposés infiniment voisins, on aura le corollaire suivant :

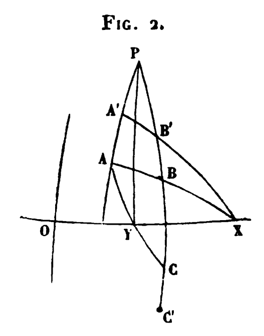
Deux tangentes menées l'une à l'ellipse, l'autre au cercle principal en des points correspondants coupent l'axe

commun au même point. Ce qui donne un moyen géométrique de faire passer par un point quelconque une tangente à une ellipse sphérique, et aussi de mener une tangente commune à deux ellipses ayant leurs axes a, a' sur un même cercle, et les tangentes des quatre axes étant données en proportion.

Problème. *Étant donnés les directions des axes d'une ellipse et deux points, trouver la grandeur des axes.*

Soient A et B les points donnés, A′ et B′ les points cor-

Fig. 2.



respondants du cercle principal supposé connu, C et C′ les points symétriques de B et B′, X la rencontre de l'arc AB avec l'axe OX, Y la rencontre du même axe avec l'arc AC ou avec A′C′, enfin P la rencontre des arcs A′A et B′B. D'après un théorème démontré plus haut sur les sécantes menées d'un même point X, l'arc PY sera la polaire de X. Soit T le point où cette polaire coupe le cercle, le triangle OTX sera rectangle et donnera

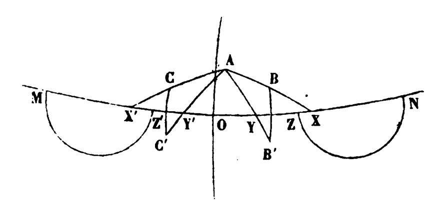
$$\operatorname{tang} OX . \operatorname{tang} OY = \operatorname{tang}^2 . OT = \operatorname{tang}^2 a$$

(a étant le demi-axe sur OX). On construira donc a en se servant du théorème sur la sécante et la tangente au cercle menées d'un même point. L'autre axe se trouve de même.

Problème. *On donne un des axes d'une ellipse en direction et trois points, trouver le centre et les axes en grandeur.*

Soient A, B, C les points donnés, MN la direction de l'axe a inconnu, et O le centre supposé connu; soit en-

Fig. 3.



core B' le symétrique de B; prolongez les arcs AB et AC jusqu'à la rencontre de l'axe aux points X, X'. On aura, d'après le problème précédent,

$$\text{tang}^2 a = \text{tang}\,OX . \text{tang}\,OY.$$

Opérant de même sur les points A et C, nous aurons

$$\text{tang}^2 a = \text{tang}\,OX' . \text{tang}\,OY'.$$

Si nous prenons

$$OZ = 2\,OY, \quad ON = 2\,OX, \quad OZ' = 2\,OY', \quad OM = 2\,OX',$$

et que sur ZN pris pour arc nous décrivions un cercle et un autre sur mZ', il suffira de construire l'axe radical de ces deux cercles, et son intersection avec MN donnera le centre. La tangente menée de ce point à l'un des cercles fera connaître le demi-axe a.

Théorème. *Dans une ellipse, les tangentes carrées des latitudes de deux points sont comme les produits des sinus des segments déterminés sur l'axe par les ordonnées des deux points.*

Si dans l'équation de l'ellipse nous remplaçons l'ordonnée géométrique par la latitude, il faudra au lieu de y mettre $\frac{Y}{\cos X}$, ce qui transforme l'équation et donne

$$\frac{Y^2}{b^2}+\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \alpha}=1,$$

de là

$$\frac{Y^2}{Y_1^2}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2 x}{\sin^2\alpha-\sin^2 x'}=\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)}{\sin(\alpha+x')\sin(\alpha-x')}.$$

Diamètres dans l'ellipse sphérique.

Si par un point A situé à 90 degrés du centre on mène un arc sécant aux points B et C, qu'on détermine le centre sphérique des moyennes distances des points B et C, c'est-à-dire un point tel, qu'on ait

$$\operatorname{tang} X=\frac{\operatorname{tang} x'+\operatorname{tang} x''}{2},\ldots,$$

le lieu de ce centre sera une circonférence de grand cercle passant au centre : on la nomme *diamètre relatif* aux cordes partant de A. En effet, appelons A la tangente de la latitude de A, l'équation de toute circonférence passant par le point donné sera

$$y=Ax+b.$$

Combinons cette équation avec celle de la courbe et prenons la demi-somme des racines, puis éliminons 6; nous aurons comme sur un plan

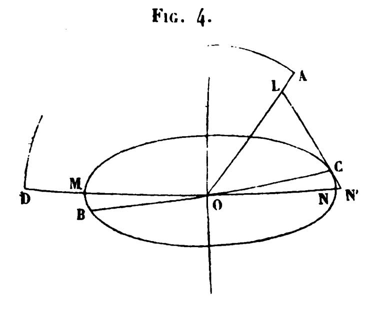
$$y=-\frac{b^2}{a^2 A}x,$$

ce qu'on avait énoncé. Soit A′ le coefficient de cette circonférence, nous aurons

$$AA'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

On voit d'après cette relation que si l'on prend sur le diamètre MN une longueur $OD = \frac{\pi}{2}$, les cordes menées du point D auront pour diamètre OA. Ainsi les deux

Fig. 4.



cercles OA et OD sont tels, que chacun est le diamètre des cordes concourant avec l'autre à 90 degrés du centre. On les nomme *diamètres conjugués*. Si l'on joint A aux points M et N, on a évidemment deux tangentes, en sorte que la polaire d'un point A à 90 degrés du centre n'est autre que le diamètre des cordes menées de ce point. Si par le point C, extrémité de l'axe, on lui mène un arc perpendiculaire prolongé jusqu'à la rencontre de deux diamètres conjugués, puis qu'on projette les arcs CL, CN' sur l'autre axe, on aura, en nommant p et p' les tangentes en valeur absolue de ces projections,

$$pp' = b_1^2;$$

quant aux axes eux-mêmes, on aura

$$\operatorname{tang} CL . \operatorname{tang} CN' = b^2 \cos^2 a.$$

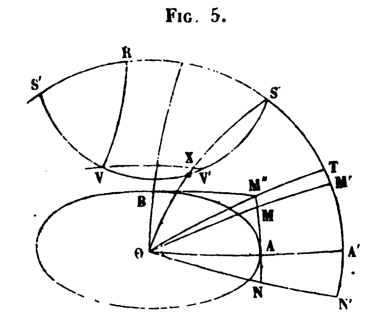
Applications. Étant donné un diamètre ON, construire géométriquement son conjugué.

On y parvient aisément à l'aide du théorème sur les sécantes au cercle menées d'un même point.

Application. *Étant donnés les axes d'une ellipse, construire deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle* α ($\alpha < 90$ *degrés*).

Supposons le problème résolu, et soient OM, ON les deux diamètres demandés et OA l'axe; prolongeons ces

Fig. 5.



trois arcs jusqu'à leur rencontre en M', N', A' avec un grand cercle ayant O pour pôle; l'arc M'N' sera égal à α, et l'on aura

$$\operatorname{tang} A'M' . \operatorname{tang} A'N' = \frac{\operatorname{tang} AM . \operatorname{tang} AN}{\sin^2 \alpha} = \frac{b^2}{a^2},$$

a et b représentant les tangentes des demi-axes. Si donc on élève aux points A et B, extrémités des axes, deux arcs perpendiculaires se coupant en M″, qu'on prolonge l'arc M″ jusqu'en T, on aura

$$\operatorname{tang} A'T = \frac{b}{a};$$

donc on a

$$\operatorname{tang} A'M' . \operatorname{tang} A'N' = \operatorname{tang}^2 A'T.$$

Le problème est donc ramené à diviser un arc M'N' en deux segments tels, que le produit de leurs tangentes égale tang^2 A'T. Pour cela, je prends

$$A'S = 2 A'T \quad \text{et} \quad SS' = 2\alpha;$$

sur SS′ comme arc diamétral je décris un cercle, et de O comme pôle un autre cercle avec OS — A′S comme distance polaire; je suppose que les deux cercles se coupent en V, V′; je projette V sur SS′ et j'ai

$$\operatorname{tang}\frac{RS'}{2}\operatorname{tang}\frac{RS}{2}=\operatorname{tang}^2\frac{RV}{2}=\operatorname{tang}^2\frac{SA'}{2}=\frac{b^2}{a^2};$$

or

$$\frac{RS}{2}+\frac{RS'}{2}=\alpha;$$

donc il suffit pour achever la construction de prendre A′M′ et A′N′ égaux aux arcs $\frac{RS}{2}$, $\frac{RS'}{2}$, et de prendre O aux points M′, N′ ainsi obtenus.

Discussion. Pour que les cercles se coupent, il faut qu'on ait

$$A'S<\alpha,$$

ou

$$\operatorname{tang}^2 A'T<\operatorname{tang}\alpha,$$

ou

$$\operatorname{tang}\alpha>\frac{2ab}{a^2-b^2},$$

ce qui donne le minimum de l'angle aigu formé par deux diamètres conjugués. Quand on prend pour α sa valeur minimum, il résulte de la construction que les deux diamètres sont également inclinés sur l'axe, et par conséquent sont égaux; ils sont représentés par OM″T et sont symétriques par rapport à l'axe de la courbe.

QUESTIONS.

442.

$$\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)}{\sin\alpha_0 \sin(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)}$$
$$= \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0 \sin(\alpha_0 + \alpha_1)} + \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_0 + \alpha_1)\sin(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)}$$
$$+ \ldots + \frac{\sin\alpha_n}{\sin(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})\sin(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)}.$$

(Oscar Werner.)

443. Par un point *fixe* donné dans le plan d'une conique passe une sécante *mobile*, trouver le lieu géométrique du point d'intersection des deux normales menées à la conique aux deux points où la sécante coupe la conique. Quel est le lieu lorsque le point fixe est un foyer?

444. On a n urnes renfermant chacune les m premiers numéros. On tire un numéro de chaque urne; quelle est la probabilité que la somme des nombres sortis 1° soit égale à un nombre donné, 2° soit comprise entre deux nombres donnés?

445. Si dans un déterminant d'ordre n on efface tous les termes qui renferment *au moins* deux éléments de l'une quelconque des deux diagonales ou d'une parallèle à ces diagonales, quel est le nombre des termes restants?

SOLUTION DE LA QUESTION 431 (PROUHET)

(voir p. 185);

PAR M. ALBERT BERGIS,
Élève de seconde au lycée Charlemagne (classe de M. Rouché).

ABCDEF *est un hexagone inscrit dans une circonférence. Si l'on pose*

$$AB = a, \quad CD = b, \quad EF = c,$$
$$DE = a', \quad FA = b', \quad BC = c',$$
$$CF = A, \quad BE = B, \quad AD = C,$$

on aura

$$A.B.C = aa'A + bb'B + cc'C + abc + a'b'c'.$$

Désignons par

$$B', \quad C', \quad D', \quad E', \quad F', \quad A',$$

les diagonales

$$AC, \quad BD, \quad CE, \quad DF, \quad EA, \quad FB.$$

Le théorème de Ptolémée, appliqué successivement aux quadrilatères inscrits CEBF, BCAF, ABCD, BCDE, donne

(1) $$D'.A' = A.B - c.c',$$
(2) $$A'B' = b'c' + aA,$$
(3) $$B'C' = ab + c'C,$$
(4) $$C'D' = a'c' + bB.$$

En multipliant (1) par (3) et (2) par (4), on obtient pour le produit

$$A'.B'.C'.D',$$

les deux valeurs

$$(ab + c'C)(AB - cc'),$$
$$(b'c' + aA)(a'c' + bB),$$

qu'il suffit d'égaler pour trouver, réductions faites, la relation à démontrer.

Note. M. L.-M.-A.-G. Andanson, professeur à Tournus, constate qu'il n'existe que deux systèmes distincts de trois quadrilatères qui mènent chacun au but.

MM. L. Brault (institution Barbet), L. Chaillot (classe de M. Lenglier, lycée de Versailles), H. Hermary (lycée de Saint-Omer, classe de M. Souillart), Mendes (lycée Saint-Louis, classe de M. Briot), J. Grouvelle (lycée Louis-le-Grand, classe de M. Vieille), ont résolu la question de la même manière.

SOLUTION DE LA QUESTION 404

(voir t. XVI, p. 401);

PAR M. G. JOURNEAUX, DE LIÉGE.

Deux points matériels parcourent d'un mouvement uniforme, avec des vitesses données en grandeur et en direction, deux droites situées dans l'espace; trouver l'équation de la surface décrite par la droite variable qui passe par deux positions simultanées des points matériels.

Soient M et M' les deux points mobiles, v et v' leurs vitesses, A et A' leurs positions respectives sur les droites données à l'origine du mouvement, et posons $AA' = 2\delta$. Prenons le milieu O de AA' pour origine, pour axe des z la droite AA' elle-même, et pour axes des x et des y les parallèles menées par le point O aux deux droites données. Les coordonnées positives sont comptées dans le

sens du mouvement. Les équations de la droite AM seront

$$z = \delta \quad \text{et} \quad y = 0 ;$$

celles de la droite A′ M′

$$z = -\delta \quad \text{et} \quad x = 0.$$

Les coordonnées du point M, après un temps quelconque t, seront donc

$$x = vt, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = \delta ;$$

celles du point M′, au même instant,

$$x = 0, \quad y = v't \quad \text{et} \quad z = -\delta.$$

On aura donc pour équation de la droite passant par ces deux points

$$(\mathrm{D}) \qquad \left.\begin{array}{l} x - vt = \dfrac{vt}{2\delta}(z - \delta) \\ \text{et} \\ y = \dfrac{-v't}{2\delta}(z - \delta), \end{array}\right.$$

et, en éliminant t entre ces deux équations, on obtiendra pour l'équation de la surface

$$(\mathrm{S}) \qquad \frac{x}{v(\delta + z)} = \frac{y}{v'(\delta - z)}.$$

Les sections de cette surface par les plans des xz et des yz sont, comme on devait s'y attendre, les deux droites données elles-mêmes. La section par le plan des xy est la droite

$$z = 0, \quad y = \frac{v'}{v} x.$$

Ainsi la surface représentée par l'équation (S) est un paraboloïde hyperbolique, puisque le paraboloïde hyper-

bolique est la seule des surfaces du second ordre sur laquelle on puisse trouver, comme ici, trois droites parallèles à un même plan, et non situées dans un même plan.

Ce paraboloïde est déterminé géométriquement, puisque nous connaissons trois génératrices d'un même système. Si l'on veut qu'il soit donné par deux directrices et un plan directeur, nous remarquerons que la droite mobile qui, d'après l'énoncé du problème, engendre la surface, doit coïncider, dans ses positions successives, avec les génératrices du second système. Or, si l'on élimine z entre les équations (D) de cette droite, on trouve, pour équation de sa projection sur le plan des xy,

$$\frac{x}{v} + \frac{y}{v'} = t.$$

La droite mobile est donc constamment parallèle à un même plan, ce que, du reste, on savait déjà, et l'on obtiendra ce plan directeur en menant par l'origine, dans le plan des xy, la droite

$$\frac{x}{v} + \frac{y}{v'} = 0,$$

et faisant passer un plan par cette droite et l'axe des z.

On pourra ensuite prendre pour directrices les deux droites données AM et A′ M′.

La droite

$$z = 0, \quad \frac{x}{v} + \frac{y}{v'} = 0,$$

intersection des deux plans directeurs, fait connaître la direction de l'axe du paraboloïde.

Note du Rédacteur. Deux droites étant rencontrées par un faisceau de plans sont coupées *homographique-*

ment, c'est-à-dire que quatre points quelconques d'intersection sur la première droite donnent le même rapport anharmonique que les quatre points correspondants de la seconde droite; en joignant les points d'intersection correspondants par des droites, on obtient les éléments rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe; car toutes ces droites rencontrent les droites données et l'arête du faisceau. Lorsque cette arête s'éloigne à l'infini, en d'autres termes, lorsque les plans deviennent parallèles, l'hyperboloïde devient parabolique, et, réciproquement, lorsque deux systèmes de points sont disposés homographiquement sur deux droites, et que trois des quatre droites qui joignent des points correspondants rencontrent une même droite, toutes les droites de jonction sont sur un hyperboloïde à une nappe; et si trois droites de jonction sont parallèles à un même plan cet hyperboloïde devient parabolique. Or, dans deux mouvements uniformes rectilignes, les points correspondants sont évidemment en relation homographique, et les droites de jonction sont parallèles au plan qui projette la position initiale de la droite mobile sur le plan parallèle aux deux directrices; donc cette droite décrit un paraboloïde hyperbolique.

Remarquons, en passant, qu'une droite qui s'appuie constamment sur trois autres comme directrices, décrit un hyperboloïde à une nappe, excepté lorsque les trois directrices sont parallèles à un même plan; on obtient alors un paraboloïde hyperbolique. Lorsque deux points parcourent d'un mouvement uniforme deux droites dans un même plan, les droites de jonction ont pour enveloppe une ellipse, et les droites données sont parallèles aux diamètres conjugués égaux de cette ellipse.

MM. Laquières (lycée Saint-Louis), Grolons (institution Verdot), Lamacq (institution Massin), Rassicod

(lycée Saint-Louis), Robin (aspirant répétiteur au lycée de Brest), ont résolu la question de la même manière.

NOTE

Sur l'équation aux carrés des différences des racines d'une équation du quatrième degré ;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Étant donnée l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

posons

$$a^2\varpi = b^2 - ac, \quad 12a^2\mu = ae - 4bd + 3c^2$$
$$8a^3\lambda = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

l'équation aux carrés des différences des racines peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} t^2(t - 12\varpi)^4 &- 32(\varpi^2 - \mu)t^2.[3t^2 - 88\varpi t + 72(q\varpi^2 - 7\mu)] \\ &- 256(\mu\varpi + \lambda)t.(13t^2 - 144\varpi t + 1296\mu) \\ &+ 188.8^4(\mu^3 - \lambda^2) = 0, \end{aligned}$$

en sorte que si l'on a

$$\mu = \varpi^2, \quad \lambda = -\varpi^3,$$

cette dernière équation se réduit à

$$t^2(t - 12\varpi)^4 = 0.$$

Or, les équations que je viens de poser sont précisément les conditions pour que le premier membre de l'équation donnée soit un carré parfait, et, dans ce cas, l'équation au carré des différences de ses racines a évidemment deux

racines égales à zéro, et celles qui restent ont toutes la même valeur, savoir, 12ϖ.

EXTENSION DE LA LOI DE BODE;

PAR M. DURAND,
Professeur de mathématiques au Prytanée de la Flèche.

On sait que le nombre 4, ajouté aux différents termes de la série

$$0,\quad 3,\quad 6,\quad 12,\quad 24,\quad 48,\quad 96,\ldots$$

dont chaque terme, à partir du troisième, est double du précédent, donne des nombres sensiblement proportionnels aux distances des planètes au soleil.

N'est-il pas naturel, d'après cela, d'examiner si la loi de Bode ne s'appliquerait pas aussi aux satellites?

C'est ce que j'ai essayé, et j'ai trouvé que le nombre 3, ajouté aux mêmes nombres

$$3,\quad 6,\quad 12,\quad 24,$$

donne assez exactement les distances connues des satellites de Jupiter à leur planète.

On trouve, en effet,

$$6,\quad 9,\quad 15,\quad 27,$$

nombres très-peu différents de

$$6{,}05,\quad 9{,}62,\quad 15{,}35,\quad 26{,}998,$$

qui expriment les distances des satellites de Jupiter à la planète, le rayon de Jupiter étant pris pour unité.

Cette remarque, que je crois nouvelle, peut servir au moins à fixer dans la mémoire les distances de Jupiter à ses quatre satellites.

Les mêmes recherches, appliquées aux anneaux et aux

satellites des autres planètes, donnent des résultats moins satisfaisants ; cependant, malgré plusieurs exceptions, on peut dire, en tenant compte de l'incertitude des observations, que l'esprit général de la loi se manifeste encore, c'est-à-dire que les distances déterminées sont sensiblement proportionnelles aux nombres fournis par la loi de Bode.

Pour montrer que la loi de Bode s'étend aux satellites de Saturne, je regarde chacun des anneaux de cette planète comme un satellite dont la distance au centre de la planète est moyenne entre les distances des deux bords de l'anneau au centre. Et je regarde au contraire le deuxième, le troisième, le quatrième satellite (qui se meuvent dans le même plan, et dont les distances au centre diffèrent assez peu entre elles, en comparaison des distances des satellites supérieurs), je regarde ces trois satellites comme les débris d'un même anneau, dont la distance moyenne au centre serait la moyenne des distances des trois satellites au centre de la planète.

J'imite ce qui se fait pour les planètes télescopiques comprises entre Mars et Jupiter.

Je trouve ainsi :

1er anneau		1,66
2e anneau		2,07
1er satellite		3,35
2e satellite	4,30	
3e satellite	5,28	5,36
4e satellite	6,82	
5e satellite		9,52
6e satellite		22,08
7e satellite		30,89
8e satellite		64,36

nombres sensiblement proportionnels à ceux que fournit

la loi de Bode, sans aucune modification ; car en prenant le tiers de chaque nombre de la série

4, 7, 10, 16, 28, 52, 96, 192,

on trouve

1,33, 2,33, 3,33, 5,33, 9,33, 17,33, 30,33, 65,33,

tous ces nombres, excepté le sixième, sont à peu près ceux que fournit l'observation.

Quant à Uranus, ses satellites sont très-peu connus, quelques-uns même n'ont été aperçus que par Herschel; leurs éléments sont donc très-incertains, et cependant leurs distances au centre de la planète se rapprochent encore des nombres fournis par la loi de Bode.

Ces distances sont représentées, en effet, par

7, 10, 13, 20, 49, 91,

qui rappellent assez bien

7, 10, 16, 28, 52, 100.

Si des observations plus précises venaient confirmer cette application de la loi de Bode aux satellites d'Uranus, l'absence du premier terme 4 semblerait indiquer l'existence d'un neuvième satellite encore inconnu ou d'un anneau.

Note du Rédacteur. Les temps de révolution et de rotation *sont* égaux pour les satellites et inégaux pour les planètes. Ceci annonce évidemment une diversité dans les circonstances initiales de formation, circonstances encore inconnues et dont dépendent les distances. La loi de Bode n'est qu'une espèce d'interpolation qui présente un avantage *mnémonique*.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DES AIRES DES DEUX ELLIPSOIDES DE RÉVOLUTION

(voir t. Ier, p. 80 et 524; t. III, p. 466);

D'APRÈS M. STHEPHANO GRILLO,
Ingénieur civil,
Membre de la Société des architectes ingénieurs civils de Genève.

---

1. Soient M un point d'une courbe plane, et P la projection orthogonale de ce point sur un axe situé dans le plan de la courbe; si l'on prolonge l'ordonnée PM jusqu'à N, et que l'on prenne PN égale à la partie de la normale menée en M, interceptée par l'axe, le lieu du point N est une seconde courbe plane. Soient M' et N' deux autres points correspondants, on a alors ce lemme :

L'aire du trapèze mixtiligne PNN' P', *multipliée par* 2π, *est égale à l'aire engendrée par l'arc* MM' *tournant autour de l'axe.*

La proposition est évidente lorsque MM' est arc de cercle et l'axe un diamètre.

En décomposant les deux trapèzes mixtilignes MM' PP', NN' PP', en trapèzes élémentaires, on démontre le lemme par des considérations infinitésimales.

2. *Ellipse allongée.* Soient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

l'équation d'une ellipse;

$$AA' = 2a = \text{grand axe},$$
$$BB' = 2b = \text{petit axe},$$

et $a^2 - b^2 = c^2$. Le grand axe est l'axe de révolution.

La seconde courbe (celle des N) a pour équation

$$a^4 y^2 + b^2 c^2 x^2 = a^4 b^2,$$

seconde ellipse qui a même petit axe $2b$ que la première.

Si en A et A′ on mène des tangentes à la première ellipse, rencontrant la seconde en L et L′, d'après le lemme, l'aire de l'ellipsoïde est égale à l'aire du trapèze mixtiligne ALL′A′, multipliée par 2π. Or, l'aire de ce trapèze est

$$ab\left(\cos\alpha + \frac{\alpha}{\sin\alpha}\right) \quad \text{où} \quad \frac{b}{a} = \cos\alpha.$$

Donc l'aire de l'ellipsoïde allongée est

$$2\pi ab\left(\cos\alpha + \frac{\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

(T. I, p. 480.)

3. *Ellipsoïde aplati.* Même ellipse; mais prenons le petit axe BB′ pour axe de révolution. Dès lors la seconde courbe des N a pour équation

$$b^4 x^2 - a^2 y^2 = b^4 a^2,$$

hyperbole ayant $AA' = 2a$ pour axe focal.

Si par B et B′ on mène des tangentes à l'ellipse, coupant l'hyperbole en λ et λ', l'aire de l'ellipsoïde est égale à l'aire du trapèze mixtiligne B$\lambda\lambda'$B′, multipliée par 2π. Or, l'aire du trapèze mixtiligne est

$$ab\left[\text{séc}\,\alpha + \cot\alpha \log\text{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}a\right)\right].$$

(*Voir* t. V, p. 387.)

Donc l'aire de l'ellipsoïde aplati est

$$2\pi ab\left[\text{séc}\,\alpha + \cot\alpha \log\text{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}a\right)\right].$$

(*Voir* t. I, p. 524.)

4. Le trapèze curviligne ALL′A′ est évidemment plus

petit que le trapèze $B\lambda\lambda' B'$; donc l'aire de l'ellipsoïde allongé est moindre que celle de l'ellipsoïde aplati.

Remarque. Ces résultats sont consignés dans une brochure italienne de 17 pages in-8°, publiée à Genève en 1857; au début, l'auteur donne la théorie du *Stadia*, perfectionnée par le célèbre constructeur d'instruments astronomiques M. Porro, perfectionnement loué par M. de Senarmont (*Comptes rendus*, tome XXX, n° 8, 19 août 1850). Cet instrument a été inventé en 1778, par Green, opticien de Londres. Les ingénieurs français ne l'ont connu qu'en 1816, et Lostende l'a fait adopter en 1822.

CONSTRUCTION MÉCANIQUE DE LA PARABOLE CUBIQUE;

PAR M. G. FOUCAUT,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Note du Rédacteur. La construction proposée par M. Foucaut est fondée sur les considérations suivantes :

Soit

$$y = gx^3$$

l'équation de cette parabole, axes OX, OY rectangulaires.

$$OP = x', \quad PM = y'$$

sont les ordonnées d'un point M de la courbe; la tangente en M fait avec l'abscisse un angle dont la tangente trigonométrique est égale à $3gx'^2$ et rencontre l'axe des abscisses en un point N tel, que $ON = \frac{2}{3} OP$; concevons la parabole conique $y = 3gx^2$; elle coupe l'ordonnée PM en un point E, dont les coordonnées sont x' et $3gx'^2$; la tangente en E de cette parabole rencontre l'axe des ab-

scisses en N_1, et l'on a

$$ON_1 = \frac{1}{2} x'.$$

Élevant en N_1 une perpendiculaire à EN_1, elle coupe l'axe des y en un point F, foyer de la parabole, et l'on a

$$OF = \frac{g}{12}.$$

De là découle cette construction mécanique. On détermine les points F et N_1 ; en N_1 on place le sommet d'une équerre ; on la tourne jusqu'à ce qu'une branche passe par F ; alors l'autre branche coupera l'ordonnée PM en E ; par le point E on mène une *droite* faisant avec l'axe des x un angle dont la tangente soit égale à $3gx'^2$; il suffit de porter PQ = 1 sur l'axe des abscisses et de mener EQ ; par N on mène une parallèle à cette droite EQ ; elle coupe l'ordonnée au point M, qui appartient à la parabole cubique ; et cette droite NM est tangente à la courbe ; il est donc facile de la tracer.

On choisit l'unité de l'échelle, de manière que les constructions ne tombent pas hors du papier.

On peut éviter l'échelle, en rendant l'équation homogène sous cette forme

$$a^3 y = gx^3.$$

On sait que la parabole cubique est la développée d'une parabole conique. Aussi est-elle rectifiable. C'est même la première courbe qu'on ait su rectifier. Chez les Anglais, elle porte le nom de *parabole de Neil,* nom d'un jeune gentilhomme anglais, premier *rectificateur* (1657) (*).

(*) Guillaume Neil, fils de l'écuyer Paul, ne connaissait pas la courbe qu'il venait de rectifier. C'est Wallis qui a trouvé que c'était une parabole cubique. (WALLIS, *Algebra*, p. 319, édit. 1685.)

TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES;

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

PREMIÈRE PARTIE.

FIGURES PLANES.

Préliminaires.

1. *Lorsque des points* a, b, c, d,..., e, f *se succèdent sur une droite dans un ordre quelconque, on a toujours entre ces points la relation*

$$af = ab + bc + cd \ldots + ef.$$

On convient de regarder comme positifs les segments dirigés dans un certain sens, et comme négatifs ceux qui sont dirigés dans le sens contraire.

2. Nous étendrons ce principe aux aires des triangles. Si un point mobile parcourt le périmètre d'un triangle, nous regarderons son aire comme positive lorsque le point tournera dans un certain sens, et comme négative lorsqu'il tournera en sens contraire. D'après cela, les triangles *abc* et *acb* seraient de signes contraires, et l'on vérifiera aisément le théorème suivant :

Si l'on joint un point quelconque o, *pris dans le plan d'un triangle* abc *aux sommets* a, b, c, *on aura toujours*

$$abc = abo + bco + cao,$$

d'où l'on déduira celui-ci :

Si l'on joint un point quelconque o, *pris dans le plan d'un polygone* abcd... ef *à tous les sommets, on a, pour*

l'expression de l'aire S *de ce polygone*

$$S = abo + bco + cdo \ldots efo + fao,$$

car si l'on suppose que cette relation soit vraie pour l'aire S′ d'un polygone *abcd*... *e*, qui a un sommet de moins, on aura

$$S' = abo + bco + cdo \ldots + eao;$$

mais le triangle *efa* donne

$$efa = efo + fao + aeo;$$

ajoutant ces deux équations membre à membre et observant que *eao* et *aeo* se détruisent, on a la relation indiquée; donc, etc.

On établira de la même manière ce théorème : *Si les côtés successifs* A, B, C, ..., E, F *d'un polygone sont coupés par une transversale arbitraire* O, *on a, pour l'expression de l'aire* S *de ce polygone,*

$$S = ABO + BCO + \ldots + EFO + FAO.$$

Nous indiquons par ABO l'aire du triangle formé par les trois droites A, B, O, et de même des autres.

3. Nous rappelons que l'aire S d'un triangle dont les coordonnées des sommets sont (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), est donnée par la relation

$$2S = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

les axes coordonnés sont rectangulaires, ce que nous supposerons toujours.

Cette relation permet d'*exprimer l'aire d'un triangle au moyen des équations des côtés de ce triangle.* On y arrive directement comme il suit :

Les sommets du triangle étant aux points a_1, a_2, a_3, soient

$$m_1x + n_1y + p_1 = 0,$$
$$m_2x + n_2y + p_2 = 0,$$
$$m_3x + n_3y + p_3 = 0,$$

les équations des côtés respectivement opposés à ces points, et r_2, r_3 les distances des sommets a_2, a_3 aux côtés de l'angle a_1. On a pour expression de l'aire S du triangle

$$S = \frac{1}{2}\frac{r_2 . r_3}{\sin a_1},$$

si x et y sont les coordonnées du sommet a_2, on aura pour déterminer la perpendiculaire r_2 les trois équations

$$m_1x + n_1y + p_1 = 0,$$
$$m_2x + n_2y + p_2 = r_2\sqrt{m_2^2 + n_2^2},$$
$$m_3x + n_3y + p_3 = 0,$$

l'élimination de x et y donne le déterminant

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 - r_2\sqrt{m_2^2 + n_2^2} \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où, en posant

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix} = P,$$

$$r_2 = \frac{P}{\frac{dP}{dp_2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}},$$

et de même

$$r_3 = \frac{P}{\frac{dP}{dp_3}\sqrt{m_3^2 + n_3^2}},$$

on a d'ailleurs

$$\sin a_1 = \frac{\dfrac{dP}{dp_1}}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2}\sqrt{m_3^2 + n_3^2}},$$

d'où

$$2S = \frac{P^2}{\dfrac{dP}{dp_1}\dfrac{dP}{dp_2}\dfrac{dP}{dp_3}},$$

nous avons supprimé un double signe.

Comme application de cette formule, on arrive au résultat suivant, que nous énonçons sous forme de lemme :

Lemme. *Si par les extrémités* a *et* b *d'une droite* ab *on mène deux droites* ac, bc *respectivement parallèles aux droites imaginaires* $y = \pm\sqrt{-1}\,x$, *on détermine un triangle imaginaire* abc, *dont l'aire* S *s'obtient par la relation*

$$S = \frac{\overline{ab}^2}{4\sqrt{-1}}.$$

CHAPITRE PREMIER.

§ Ier. — *Homographie.*

1. Étant donnée une courbe plane $F(x', y') = 0$, si l'on remplace les coordonnées x' et y' de chaque point par les valeurs

$$(1) \qquad x' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''},$$

on aura l'équation d'une nouvelle courbe *homographique* à la première. Les relations (1) montrent que les deux courbes seront du même degré.

Si l'on pose

$$a''x + b''y + c'' = 0,$$

on aura dans la seconde figure une droite que j'appelle I, dont les points correspondront à ceux de la première situés à l'infini.

Les relations (1) résolues par rapport à x et y donnent pour ces quantités des valeurs de même forme que celles de x' et y'; elles ont pour dénominateur commun le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix}$$

De sorte que si l'on égale ce déterminant à zéro, la droite I', que l'on aura ainsi dans la première figure, correspondra à l'infini de la seconde.

Dans la suite de ce Mémoire, nous ne supposerons connues aucunes des propriétés des figures homographiques, elles se déduiront de nos relations métriques. Nous indiquerons seulement le théorème suivant de la géométrie supérieure.

2. *Deux figures homographiques étant placées d'une manière quelconque, il existe, en général, trois points qui, considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde. Deux de ces points peuvent être imaginaires, mais le troisième est toujours réel.*

En effet, d'après les relations (1), pour que le point x', y' coïncide avec son correspondant x, y, on doit avoir

$$x(a''x + b''y + c'') = ax + by + c,$$
$$y(a''x + b''y + c'') = a'x + b'y + c',$$

de sorte que les points cherchés sont les intersections des deux hyperboles représentées par ces équations. Si l'on remarque qu'elles ont chacune une asymptote parallèle à

la droite I, on pourra les considérer comme ayant un point d'intersection à l'infini sur cette droite, par conséquent les trois autres seront, en général, à distance finie, et l'un d'eux sera nécessairement réel. Ces points sont nommés *points doubles*.

3. *Notation*. Les points d'une figure étant désignés par les lettres accentuées a', b', c', etc., les points correspondants de la figure homographique seront indiqués par les mêmes lettres a, b, c, etc., dépourvues d'accents; les lettres grecques correspondantes α, β, γ, etc., exprimeront les distances des points a, b, c... à une droite fixe I. Les lettres A', B', C'... désignant des droites d'une figure, A, B, C... seront les droites correspondantes de la figure homographique.

L'angle de deux droites A et B sera désigné par la notation ordinaire (A, B).

La suite prochainement.

QUESTIONS PROPOSÉES AUX EXAMENS.

Dans le premier volume des *Nouvelles Annales* (page 151), M. Roguet a établi de *huit* manières différentes la condition de réalité des trois racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

L'une des méthodes suivies est fondée sur les relations qui existent entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique. En admettant ces relations, on peut arriver à la condition de la réalité des trois racines, par un calcul qui me semble différer assez de celui dont l'auteur a fait usage, pour que je l'indique ici.

Je suppose que le dernier terme, $+q$, de l'équation soit positif; ce qui est permis, car s'il était négatif, en changeant le signe des racines de l'équation on changerait le signe de son dernier terme, et les conditions de la réalité des trois racines resteraient, évidemment, les mêmes.

Dans ce cas, le produit des trois racines est négatif, et leur somme est nulle; donc, si les trois racines sont réelles, deux de ces racines seront positives, et la troisième négative.

Je nomme a la plus petite des deux racines positives; b la plus grande, c la racine négative : il en résulte

$$c = -(a+b),$$

et

$$ab + (a+b)c = p;$$

d'où

$$ab - (a+b)^2 = p,$$

$$(2) \qquad a^2 + b^2 + ab = -p....$$

On voit que p doit être négatif.

Si dans l'égalité (2), $a^2 + b^2 + ab = -p$, on remplace b par a qui est moindre que b, on aura

$$3a^2 < -p; \quad a < \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Et, en remplaçant dans la même égalité (2) a par b, il s'ensuivra

$$3b^2 > -p; \quad b > \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Par conséquent, la racine a est comprise *seule* entre o et $\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Or, la substitution de o à x, dans $x^3 + px + q$ donne le résultat positif $+q$; donc le résultat de la substitution

de $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ à x doit être négatif. Ce qui donne la condition $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Réciproquement, si cette dernière inégalité a lieu, l'équation admettra une racine positive comprise entre o et $\sqrt{-\frac{p}{3}}$; et comme elle a nécessairement une racine négative, ses trois racines seront réelles. G.

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

Trouver la limite du produit $\cos a \,.\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{4}\cdot\cos\frac{a}{8}\cdots$

Euler a résolu la question; il ne l'aurait pas proposée dans les examens d'admissibilité à l'École Navale.

On a

$$\sin 2a = 2.\sin a.\cos a,$$

$$\sin a = 2.\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = 2.\sin\left(\frac{a}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{a}{4}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) = 2.\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\cdot\cos\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

La multiplication de ces équations donne

$$\sin 2a = 2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\times\cos a.\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2^2}\right)\ldots\cos\left(\frac{a}{2^n}\right),$$

d'où

$$\cos a.\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2^2}\right)\ldots\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin 2a}{2^{n+1}.\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)},$$

mais

$$\frac{\sin 2a}{2^{n+1}.\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}=\frac{\left(\frac{\sin 2a}{2a}\right)}{\frac{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2a}}=\frac{\left(\frac{\sin 2a}{2a}\right)}{\left(\frac{\sin.\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right)}.$$

Quand n augmente indéfiniment, la fraction $\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\left(\frac{a}{2^n}\right)}$ moindre que l'unité augmente aussi, et tend vers l'unité. A la limite ($n=\infty$) on a

$$\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}=1.$$

Donc la limite du produit $\cos a.\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{4}\right)\ldots$, est $\frac{\sin 2a}{2a}$ ou $\cos a\times\frac{\sin a}{a}$.

Supposons

$$a=\frac{\pi}{4};$$

il en résultera

$$2a=\frac{\pi}{2};\quad \sin 2a=1;$$

et par suite

$$\lim.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cdots=\frac{2}{\pi};$$

d'où

$$\pi=\frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cdots}.$$

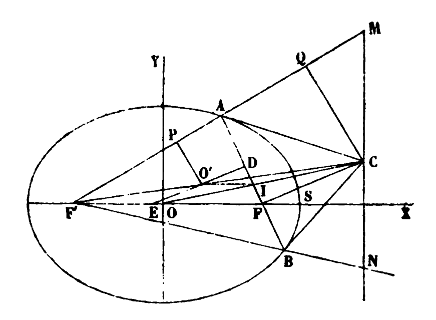
G.

SOLUTION DE LA QUESTION 433

(voir p. 185);

PAR M. J. GROUVELLE,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Vieille).

Trouver le lieu des centres des cercles inscrits aux triangles ayant pour sommet l'un des foyers d'une conique et pour base une corde passant par l'autre foyer. Le centre est sur la parallèle à l'axe focal menée par le milieu de la corde.



1. *Ellipse*. Soit AB une corde passant par le foyer F. En menant par le milieu I de cette corde une parallèle à l'axe focal, on aura une droite qui contiendra le centre du cercle inscrit au triangle ABF'.

En effet, les tangentes BC et AC aux extrémités de la corde AB viennent concourir en C sur la directrice MN, et, de plus, ces tangentes étant bissectrices des angles MAF, NBF, le point C est donc également distant de F'A, F'B et, par conséquent, la droite F'C est bissectrice de l'angle AF'B. Donc le centre du cercle inscrit se trouve sur cette droite en un point O' par exemple.

Abaissons les perpendiculaires O′P et O′D sur les côtés F′A et AB. Prolongeons O′D jusqu'à sa rencontre en E avec l'axe focal. Les quadrilatères F′EO′P, F′FCQ sont semblables ; or

$$CF = CQ,$$

donc

$$O'E = O'P = O'D;$$

ainsi O′ est le milieu de DE. Le point D est le point de contact du cercle inscrit au triangle F′AB, et, d'après une propriété connue, FC est perpendiculaire sur AB. Il en résulte que le point F est le point de contact du cercle ex-inscrit au triangle ABF′, et que l'on a

$$AD = BF.$$

Le diamètre OC conjugué à la corde AB la divise en 2 parties égales ; donc I est le milieu de DF, et O′ étant le milieu de DE, il s'ensuit que la droite O′I est parallèle à l'axe focal.

Prenons pour axes de coordonnées ceux de l'ellipse.

La droite F′C a pour équation

$$y = m(x + c).$$

Les coordonnées du point C, pôle de AB, sont donc

$$x = \frac{a^2}{c},$$

$$y = m\frac{a^2 + c^2}{c}.$$

Ainsi le lieu du cercle ex-inscrit qui touche la corde mobile est la directrice.

La polaire AB aura donc pour équation

$$m(a^2 + c^2)y + b^2x = b^2c.$$

Le point I, milieu de AB, se trouve sur le diamètre OC

dont l'équation est

$$y = \frac{a^2 + c^2}{a^2} mx.$$

Eliminant x entre les équations de OC et de AB, on trouve pour ordonnée du point I

$$y = \frac{mb^2c(a^2+c^2)}{m^2(a^2+c^2)^2 + a^2b^2}.$$

Telle est l'ordonnée du point I, et, par conséquent, l'équation de la parallèle O'I à l'axe de l'ellipse.

Or, d'après ce qui a été démontré plus haut, cette droite contient le centre du cercle inscrit. D'ailleurs la droite F'C le contient aussi. Donc pour avoir l'équation du lieu, il suffit d'éliminer l'indéterminée m entre l'équation de O'I et celle de F'C.

Exécutant cette opération, on trouve

$$y^2(a^2+c^2)^2 + a^2b^2x^2 + b^4cx - b^2c^4 = 0,$$

équation qui représente une ellipse dont un des axes est l'axe des x et l'autre parallèle à l'axe des y. Sous la première forme, on voit à priori que l'équation du lieu est vérifiée pour

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = -c,$$

c'est-à-dire que le point F' est un point du lieu.

La construction ne présente aucune difficulté.

2. *Hyperbole.* Il suffit de changer $+b^2$ en $-b^2$; ainsi le lieu cherché est une hyperbole.

3. *Parabole.* Transportons l'origine au sommet en changeant x en $x+a$.

L'équation était

$$(a^2+c^2)^2y^2 + a^2b^2x^2 + b^4cx - b^2c^4 = 0;$$

elle devient, après le transport de l'origine,

$$(a^2 + c^2)^2 y^2 + a^2 b^2 x^2 + 2 a^3 b^2 x + a^4 b^2 + b^4 cx + acb^4 - b^2 c^4 = 0.$$

Divisant les deux membres par a^4, il vient

$$\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right) y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 + 2 \cdot \frac{b^2}{a} x + b^2 + \frac{b^4 c}{a^4} x + \frac{b^4}{a^2} \frac{c}{a} - \frac{b^2 c^4}{a^4} = 0.$$

Passant aux limites, on obtient

$$4y^2 + 2px + 3p^2 = 0,$$

parabole dont le sommet a pour abscisse $-\frac{3}{2}p$ et dont le paramètre est $-\frac{p}{4}$.

M. L. G. (de Liége) fait observer : 1° que la droite O'I rencontre CF en un point N point de rencontre des trois hauteurs du triangle CAB; 2° que les trois points O', I, N décrivent des ellipses ayant des petits axes égaux.

QUADRATURES PAR APPROXIMATION;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur-agrégé, ancien élève de l'École Normale.

1.

Nous nous proposons de comparer diverses méthodes employées pour la quadrature approchée des courbes.

Nous représenterons par

$$y = f(x)$$

l'équation connue ou non de la courbe et par h l'intervalle *constant* des ordonnées dont le nombre toujours impair sera désigné par $n+1$; nous prendrons enfin la première ordonnée sur l'axe de y et nous remarquerons que les ordonnées successives ont pour expression

$$f(0),\ f(h),\ f(2h),\ldots,\ f(nh).$$

Par les extrémités des ordonnées de rang pair, nous menons des tangentes jusqu'à la rencontre des ordonnées de rang impair, prolongées s'il le faut, et nous obtenons une sorte de polygone circonscrit, à angles rentrants, ayant pour mesure

$$(1)\qquad A = 2hS_p;$$

le signe S_p indique la somme des ordonnées de rang pair.

On peut ensuite, avec Simpson, joindre les extrémités des ordonnées de rang impair et former un polygone inscrit; mais il est préférable, comme le remarque M. Piobert (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 327), de considérer un polygone ayant pour sommets les extrémités de la première ordonnée, de la dernière et de toutes celles de rang pair. Ce polygone a pour mesure

$$(2)\qquad B = h\left\{2S_p + \frac{f(0)+f(nh)-f(h)-f[(n-1)h]}{2}\right\}.$$

Comme on ne suppose aucune inflexion dans les limites de la quadrature, l'aire M de la courbe est évidemment une moyenne entre celle des polygones A et B :

$$(3)\qquad M = B + \frac{A-B}{R}.$$

Il existe pour chaque courbe en particulier une valeur de R qui donnerait l'aire exacte, mais on ne la connaît pas, et la question est ordinairement d'en trouver à priori

une valeur générale assez simple et convenant d'une manière assez approchée à toute espèce de courbes. M. Piobert, dans le Mémoire déjà cité, a calculé une Table de valeurs de R pour des courbes de diverses amplitudes; mais, en admettant la légitimité de son point de départ, l'emploi de la Table exige la connaissance de l'angle formé par les cordes et les tangentes, opération toujours bien délicate, qui devient impossible si la courbe n'est pas tracée. Aussi le savant académicien propose de prendre une moyenne entre les nombres de sa Table et indique une formule développée dans le seul cas où $R = \frac{3}{2}$. M. Parmentier a obtenu la *même* formule par des raisonnements tout différents (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 370); avec nos notations, nous écrirons

$$(4) \qquad h\left\{2S_p + \frac{f(0)+f(nh)-f(h)-f[(x-1)h]}{6}\right\}.$$

Antérieurement M. Poncelet avait pris $R = 2$, ce qui lui donnait

$$(5) \qquad h\left\{2S_p + \frac{f(0)+f(nh)-f(h)-f[(n-1)h]}{4}\right\}.$$

Vers la fin du dernier siècle, Simpson avait fait aussi $R = \frac{3}{2}$; mais, ainsi qu'il a été dit plus haut, il construisait différemment le polygone inscrit et obtenait

$$(6) \qquad \frac{h}{3}(S_e + 2S_i + 4S_p)$$

qui est la somme de la première et de la dernière ordonnées, S_i la somme des autres ordonnées de rang impair.

Nous trouvons enfin dans les *Nouvelles Annales* (t. X,

p. 415) une formule de M. Catalan :

$$(7)\quad h\left\{\begin{array}{l} S-\frac{5}{8}[f(0)+f(nh)]+\frac{1}{6}\{f(h)+f[(n-1)h]\} \\ -\frac{1}{24}\{f(2h)+f[(n-2)h]\} \end{array}\right\}.$$

II.

Lorsqu'on a seulement, pour mesurer une courbe, la connaissance des ordonnées, il règne une telle indétermination, que je crois impossible d'affirmer à priori que telle ou telle formule l'emportera *toujours* sur les autres par l'exactitude. Je vais donc faire une hypothèse particulière.

J'admets que l'ordonnée de la courbe puisse se développer en une série *rapidement* convergente

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} y=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{6}f'''(0) \\ \qquad +\frac{x^4}{24}f^{\text{IV}}(0)+\ldots. \end{array}\right.$$

C'est supposer implicitement, comme on le fait dans l'interpolation, que la courbe est parabolique, et, de plus, que la différence des dernières ordonnées aux premières n'est pas excessive; nous admettons aussi qu'il n'y ait pas de tangente parallèle aux y, circonstance qui ne peut se présenter dans les paraboles dont nous parlons.

Notre hypothèse comprend encore les hyperboles ayant pour type

$$y=b^{m+1}(x+a)^{-m},$$

pourvu que $\frac{x}{a}$ reste très-petit.

L'intégration de la série (8) entre 0 et nh nous don-

nera

$$(9)\quad \begin{cases} nhf(0)+\dfrac{n^2h^2}{2}f'(0)+\dfrac{n^3h^3}{6}f''(0)+\dfrac{n^4h^4}{24}f'''(0) \\ \qquad +\dfrac{n^5h^5}{120}f^{\text{IV}}(0)+\ldots \end{cases}$$

Si nous calculons par l'équation (8) les ordonnées équidistantes et que nous portions les valeurs ainsi obtenues dans les formules (1), (2), (4), (5), (6), (7), chacune d'elles reproduira le développement (9) accru de certaines *erreurs* indiquées dans le tableau suivant :

Polygone circonscrit.

$$-\frac{nh^3}{6}f''(0)-\frac{n^2h^4}{12}f'''(0)\ldots$$

Polygone inscrit.

$$\left(\frac{2n-3}{6}\right)h^3f''(0)+\left(\frac{2n^2-3n}{12}\right)h^4f'''(0)+\ldots$$

M. Poncelet.

$$\left(\frac{n-3}{12}\right)h^3f''(0)+\left(\frac{n^2-3n}{24}\right)h^4f'''(0)+\ldots$$

MM. Piobert et Parmentier.

$$-\frac{1}{6}h^3f''(0)-\frac{n}{12}h^4f'''(0)+\ldots$$

Simpson.

$$+\frac{n}{180}h^5f^{\text{IV}}(0)+\ldots$$

M. Catalan.

$$-\frac{h^5}{24}f^{\text{IV}}(0)+\ldots$$

Effectuons les mêmes substitutions dans l'expression (3)

et déterminons R de manière à faire disparaître les termes en h^3 qui se trouvent dans le développement de l'erreur, il arrive que les termes en h^4 disparaissent aussi. Il faut pour cela poser

$$R = \frac{3n - 3}{2n - 3},$$

ce qui donne la formule *nouvelle*

$$\frac{(2n - 3) A + nB}{3n - 3}$$

ou

$$h \left\{ 2 S_p + \left[\frac{f(o) + f(nh) - f(h) - f[(n-1)h]}{6} \right] \frac{n}{n-1} \right\},$$

qui est en erreur de

$$\left(\frac{n}{360} - \frac{n^2}{72} \right) h^5 f^{iv}(o) + \dots$$

Cette formule nouvelle, celles de Simpson et de M. Catalan donnent à peu près la même approximation, puisque, pour toutes les trois, l'erreur ne commence qu'au terme en $f^{iv}(o)$ qui dans notre hypothèse est très-petit. Elles sont donc préférables, sous le rapport de l'exactitude, aux quatre premières, mais la formule de M. Catalan est moins simple que celle de Simpson, qui elle-même exige l'emploi de plus d'ordonnées que la nôtre.

Pour comparer les erreurs des quatre autres formules, je m'arrêterai aux premiers termes qui, dans notre hypothèse, sont prépondérants, et, au point de vue de l'exactitude, j'établirai l'ordre suivant : MM. Piobert et Parmentier, M. Poncelet, polygone circonscrit, polygone inscrit.

Mais l'exactitude n'est pas la qualité la plus essentielle; tous les praticiens que j'ai consultés m'ont avoué que la

méthode des trapèzes leur suffisait, et, pour ma part, je préférerais à toutes les autres la règle de M. Poncelet, à laquelle nous n'avons donné que le cinquième rang, mais qui, à nos yeux, a le grand mérite de faire connaître une limite TOUJOURS certaine de l'erreur $\frac{A-B}{2}$.

Nous avons examiné jusqu'ici un cas *favorable*; il pourrait arriver que des tangentes fussent parallèles aux y ou que les ordonnées prissent de rapides accroissements; il faudrait alors ou changer les axes, ce qui suppose la courbe tracée, ou multiplier les ordonnées, et si ces moyens sont impraticables, on se résignera à une faible approximation que la formule de M. Poncelet fera toujours connaître.

III.

Il semble au premier abord que l'indétermination serait moins grande si l'on savait tracer les tangentes; mais, en y réfléchissant, on reconnaît qu'il existe une infinité de courbes qui touchent deux droites données en deux points donnés.

On pourrait cependant mener aux extrémités de toutes les ordonnées des tangentes qui par leurs intersections mutuelles formeraient un polygone *réellement* circonscrit C; on joindrait les extrémités des ordonnées consécutives pour former un second polygone inscrit I, et il s'agirait toujours de prendre une moyenne

$$I+\frac{C-I}{R}.$$

Pour calculer C, il faudrait tracer les ordonnées des points d'intersection des tangentes consécutives. Remarquons encore que le polygone C se rapprochera ordinairement plus de la courbe que le polygone à angles ren-

trants A que nous avions d'abord considéré; c'est là l'avantage que procure le tracé des tangentes.

Pour déterminer R, on pourrait remplacer chaque petit arc de courbe compris entre deux ordonnées successives par un arc de parabole du second degré ayant mêmes extrémités et mêmes tangentes à ces extrémités. Je crois l'arc de parabole dans ces conditions préférable en général à l'arc de cercle proposé par M. Piobert (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 328), parce que l'équation de la parabole contient quatre paramètres et celle du cercle trois seulement.

Dans la parabole, le triangle formé par deux tangentes et leur corde de contact est triple du segment limité par les tangentes et la courbe, ce qui nous conduirait à adopter pour R la valeur $\frac{3}{2}$ et pour la surface cherchée

$$\frac{I+2C}{3}.$$

Mais, nous le répétons, il nous paraît impossible d'affirmer que cette méthode soit *toujours* préférable à une autre, et on devrait, selon nous, adopter, comme dans le § II, $R=2$, ce qui donne pour limite *certaine* de l'erreur $\frac{I-C}{2}$.

Cependant, comme il est assez facile de tracer avec la règle une parabole quand on connaît deux tangentes et leurs points de contact, on pourrait examiner si les petits arcs de la courbe donnée s'approchent assez des arcs paraboliques pour prendre $R=\frac{3}{2}$.

---

d'où l'on déduit

$$(x_1 y_2 z_3) = \frac{(d y_2 z_3)}{a} = \frac{(x_1 d z_3)}{b} = \frac{(x_1 y_2 d)}{c}$$

et de là pour l'équation du plan

$$(d y_2 z_3)\, x + (x_1 d z_3)\, y + (x_1 y_2 d)\, z = d\,(x_1 y_2 z_3);$$

les parenthèses désignent des déterminants.

Ou bien

$$x\,[(y_1 z_2) + (y_2 z_3) + (y_3 z_4)] + y\,[(x_1 z_3) + (x_2 z_1) + (x_3 z_2)]$$
$$+ z\,[(x_1 y_2) + (x_2 y_3) + (x_3 y_1)] = (x_1 y_2 z_3),$$

et développant

$$x\,[y_1 (z_2 - z_3) + y_2 (z_3 - z_1) + y_3 (z_1 - z_2)]$$
$$+ y\,[z_1 (x_2 - x_3) + z_2 (x_3 - x_1) + z_3 (x_1 - x_2)]$$
$$+ z\,(x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$$
$$= x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$$

2. Soient les neuf points A, B, C, D, E, F, F, H, I, ayant pour coordonnées respectives, savoir

A..... x_1, y_1, z_1,
B..... x_2, y_2, z_2,
C..... x_3, y_3, z_3,
....
I..... x_9, y_9, z_9,

Concevons le tétraèdre ABCD; d'après le § 1, on peut trouver les équations des plans, faces du solide.

Désignons par

$a = 0$ l'équation des plans BCD,
$b = 0$ » ACD,
$c = 0$ » ABD,
$d = 0$ » ABC.

Désignons par a_5, b_5 ce que deviennent a et b lorsqu'on y remplace x, y, z respectivement par les coordonnées x_5, y_5, z_5 du point E, et ainsi des autres ; on obtient pour

l'équation du plan	CDE	$ab_5 - ba_5 = 0$,
»	CDF	$ab_6 - ba_6 = 0$,
»	ABE	$cd_5 - dc_5 = 0$,
»	ABF	$cd_5 - dc_6 = 0$.

Le faisceau de surfaces donné par l'équation

$$(ab_5 - ba_5)(cd_6 - dc_6) - K(ab_6 - ba_6)(cd_5\ dc_5) = 0,$$

où K est une indéterminée, passe par les six points A, B, C, D, E, F, ce qu'on peut écrire d'une manière abrégée

$$(ab_5)(cd_6) - K(ab_6)(cd_5) = 0.$$

Déterminons K de manière qu'une des surfaces du faisceau passe par le septième point G (x_7, y_7, z_7) ; alors il vient

$$R = (ab_5)(cd_6)(a_7\, b_6)(c_7\, d_5) - (ab_6)(cd_5)(a_7\, b_5)(c_7\, d_6) = 0.$$

Les parenthèses sont des binômes alternés et $R = 0$ est une des surfaces qui passent par les sept points A, B, C, D, E, F, G, et cette surface est réglée ; car les deux droites AB, CD, arêtes opposées du tétatrèdre ABCD, sont entièrement sur cette surface.

Par ces mêmes sept points, on peut faire passer une seconde surface réglée S renfermant les deux droites AD, CB ; pour avoir S, il suffit de changer dans R b en d et d en b ; on obtient

$$S = (ad_5)(cb_5)(a_7\, d_6)(c_7\, b_5) - (ad_6)(cb_5)(a_7\, d_5)(c_7\, b_6) = 0.$$

Enfin par ces mêmes points on peut faire passer une troisième surface réglée I renfermant les deux droites

AC, BD; il suffit de changer dans R, b en c et c en b; on a

$$I = (ac_5)(bd_6)(a_7c_6)(b_7d_5) - (ac_6)(bd_5)(a_7c_5)(b_7d_6);$$

la surface du deuxième degré donnée par l'équation

$$pR + qS = T$$

passe évidemment par les sept points A, B, C, D, E, F, G, et en général n'est plus réglée et les deux indéterminées p et q peuvent servir à faire passer la surface par les deux points restants H et I; désignant par R_8, S_8, T_8; R_9, S_9, T_9 ce que deviennent respectivement R, S, T en remplaçant x, y, z successivement par x_8, y_8, z_8; x_9, y_9, z_9 on a

$$pR_8 + qS_8 = T_8,$$
$$pR_9 + qS_9 = T_9,$$

d'où l'on tire

$$(R_8 S_9) = \frac{(T_8 S_9)}{p} + \frac{(R_8 T_9)}{q};$$

ainsi l'équation de la surface qui passe par les neufs points donnés sera

$$(1) \qquad (T_8 S_9) R + (R_8 T_9) S + (S_9 R_8) T = 0.$$

R renferme 32 termes; $(T_8 S_9)$ renferme $2 . 32^2$ termes, ainsi $(T_8 S_9)$ R contient $2 . 32^3$ termes, et l'équation (1) contient en général $6 . 32^3 = 196608$ termes; c'est le nombre en considérant a, b, c, d comme des monômes; mais chacun renferme vingt-quatre termes exprimés en fonction des coordonnées; ainsi le nombre des termes de l'équation en fonction des vingt-sept coordonnées est $3^{13} . 2^{52}$ termes $= 7,180,264,989,898,998,898,989$, nombre composé de vingt-deux chiffres, mais dans les calculs numériques le nombre de termes se réduit considérablement.

3. Si x_1, y_1, z_1, sont les coordonnées d'un dixième point situé sur la même surface, et si l'on désigne par

R_{10}, S_{10}, T_{10}, ce que deviennent R, S, T en y remplaçant x, y, z par x_{10}, y_{10}, z_{10}, on a la relation suivante entre les coordonnées de dix points situés sur la surface

$$(T_8 S_9) R_{10} + (R_8 T_9) S_{10} + (S_9 R_8) T_{10} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} T_8, & T_9, & T_{10} \\ S_8, & S_9, & S_{10} \\ R_8, & R_9, & R_{10} \end{vmatrix} = 0.$$

INVARIANTS;

PAR M. DE BLERZY,
Directeur des lignes télégraphiques à la Rochelle.

1. On lit, page 200 de la *Théorie des déterminants*, du Dr Brioschi (traduction Combescure) que les invariants φ d'une fonction

(1) $$f_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n$$

doivent vérifier les équations différentielles

(2) $$\sum_{i=0}^{i=n} i a_{i-1} \frac{d\varphi}{d_{ai}} = 0,$$

et

(3) $$\sum_{i=0}^{i=n} i a_{n-i+1} \frac{d\varphi}{da_{n-i}} = 0.$$

La seconde de ces équations différentielles par sa texture et par son mode de formation est symétrique de la première par rapport à (a_i, a_{n-i}), c'est-à-dire qu'elle se déduit de la première par la substitution de a_{n-i} à a_i, pourvu que φ soit symétrique. La condition de symétrie mise à l'équation (2) suffit donc pour caractériser les invariants.

Le savant traducteur de l'ouvrage cité ajoute :

« M. Cayley a prouvé qu'une seule équation différentielle jointe à la condition d'*homogénéité* peut remplacer les deux équations dont il s'agit. » Cette homogénéité doit probablement s'étendre tant aux indices qu'aux exposants.

2. Une fonction paire f_{2m} a un invariant du 2e degré qui est

$$(4)\quad {}^{*}I_{2m} = a_0 a_{2m} - 2m . a_1 a_{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1.2} a_2 a_{2m-2} - \ldots, \pm \frac{1}{2} . \frac{2m\ldots(m+1)}{1.2\ldots m} a_m^2.$$

I_{2m} est symétrique et satisfait l'équation (2); la vérification est facile.

3. Une fonction impaire f_{2m+1} a un invariant 4e degré qui est

$$(5)\qquad I_{2m+1} = \left(\sum_{i=0}^{i=2m+1} a_i \frac{dI_{2m}}{da_{i-1}}\right)^2 - 4 I_{2m} I_{2m},$$

I_{2m} étant l'invariant du 2e degré de

$$f_{2m}(a_0, a_1, \ldots, a_{2m})(x, y)^{2m},$$

I'_{2m} étant l'invariant du 2e degré de

$$f_{2m}(a_1, a_2, \ldots, a_{2m+1})(x, y)^{2m}.$$

On peut écrire cet invariant sous la forme suivante :

$$(6)\quad I_{2m+1} = \begin{pmatrix} a_0 a_{2m+1} - \alpha_1 . a_1 a_{2m} \\ + \alpha_2 . a_2 \, a_{2m+1} + \ldots \\ \pm \alpha_i . a_i \, a_{2m-i+1} \ldots \pm \alpha_m . a_m a_{m+1} \end{pmatrix}^2 - 4 I_{2m} I'_{2m},$$

où α_i se déduit de α_{i-1} par la formule

$$i\alpha_i = (2m - i + 2)\alpha_{i-1} - 2 . \frac{2m\ldots(2m-i+2)}{1.2\ldots(i-1)},$$

et $\alpha_1 = 2m - 1$.

(*) I_{2m} c'est φ. Tm.

I_{2m+1} est symétrique sous les deux formes que nous venons de lui donner, et la vérification de l'équation différentielle (2) s'en fait aisément en ayant égard à

$$\sum_{i=0}^{i=2m} ia_{i-1}\frac{dI_{2m}}{da_i}=0.$$

4. La fonction paire f_{2m} a un invariant du degré $m+1$ qui est

$$(7)\qquad I_{2m+1}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1,\ldots, & a_m, \\ a_1 & a_2,\ldots, & a_{m+1}, \\ a_2 & a_3,\ldots, & \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m, & a_{m+1},\ldots, & a_{2m}, \end{vmatrix}\quad \text{(à démontrer)}.$$

5. Il serait bon que les invariants fussent toujours écrits d'une manière uniforme, par exemple, sous la forme que leur donnent les formules ci-dessus. En employant la notation habituelle (*), on a, pour le 2e degré

$$I_2=ac-b^2 \quad \text{ou} \quad I_2=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix};$$

pour le 3e degré,

$$I_3=(ad-bc)^2-4(ac-b^2);$$

pour le 4e degré,

$$I_4=ae-4bd+3c^2,$$

et

$$I_4=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}=ace+2bcd-b^2e-ad^2c^3;$$

pour le 5e degré,

$$I_5=(af-3be+2cd)^2-4(ac-4bd+3c^2)(bf-4ce+3d^2).$$

(*) Alors on remplace a_0 par a, a_1 par b, a_2 par c, a_3 par d, etc. Tm.

Les équations différentielles de condition sont, pour le 5e degré,

$$a\frac{dI}{db}+2b\frac{dI}{dc}+3c\frac{dI}{dd}+4d\frac{dI}{de}+5e\frac{dI}{df}=0,$$

et

$$5b\frac{dI}{da}+4c\frac{dI}{db}+3d\frac{dI}{dc}+2e\frac{dI}{dd}+f\frac{dI}{de}=0.$$

En vérifiant, au moyen de ces équations, l'invariant I_8 que nous venons d'écrire, on verra clairement que la condition de symétrie peut être substituée à l'une d'elles.

Note du Rédacteur.

Premier exemple. Soit $n=4$; par conséquent $m=2$. On a

$$f_4=a_1x^4+4a_2\;x^3y+6a_3\;x^2y^2+4a_4\;xy^3+a_5y^4.$$

Premier invariant.

$$\varphi=I_4=a_0a_4-4a_1a_3+6a_2^2-3a_2^2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2.$$

L'équation (2) développée est

$$(2)\qquad a_0\frac{d\varphi}{da_1}+2a_1\frac{d\varphi}{da_2}+3a_2\frac{d\varphi}{da_3}+4a_3\frac{d\varphi}{da_4}=0,$$

$$\frac{d\varphi}{da_1}=-4a_3;\quad \frac{d\varphi}{da_2}=6a_2;\quad \frac{d\varphi}{da_3}=-4a_1;\quad \frac{d\varphi}{da_4}=a_0;$$

faisant les substitutions, l'équation (2) se vérifie.

Deuxième invariant.

$$\varphi=I_4=a_0\,a_2a_4+2a_1\,a_2a_3-a_1^4a_4-a_0\,a_2^3-a_2^3,$$

$$\frac{d\varphi}{da_1}=2\,(a_2a_3-a_1a_4);\quad \frac{d\varphi}{da_2}=a_0a_4+2a_1a_3-3a_2^2;$$

$$\frac{d\varphi}{da_3}=2\,(a_1a_2-a_0a_3);\quad \frac{d\varphi}{da_4}=a_0\,a_2-a_1^2;$$

les substitutions vérifient l'équation (2).

Deuxième exemple :

$n = 3;\quad m = 1;$

$f_3 = a_0 x^3 + 3a_1 x^2y + 3a_2 xy_2 + a_3;$

$f_2 = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2;\quad f'_2 = a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2;$

$I_2 = a_0 a_2 - a_1^2;\quad I'_2 = a_1 a_3 - a_2^2;$

$$I_3 = \left(a_1 \frac{dI_2}{da_0} + a_2 \frac{dI_2}{da_1} + a_3 \frac{dI_2}{da_2}\right)^2 - 4 I_2 I'_2,$$

c'est l'équation (5) développée

$$\frac{dI_2}{da_0} = a_2;\quad \frac{dI_2}{da_1} = -2a_1;\quad \frac{dI_2}{da_2} = a_0.$$

Substituant, on trouve

$$I_3 = (a_0 a_3 - a_2 a_1)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) = \varphi,$$

L'équation (2) développée est

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} = 0.$$

Faisant les substitutions, elle se vérifie de même pour I_5.

QUESTION D'EXAMEN

(Admissibilité à l'École Navale).

Sachant que le volume d'un segment sphérique à une base est une fonction entière du troisième degré de la hauteur du segment, déterminer cette fonction.

Soient h la hauteur du segment et r le rayon de la

sphère. Quand $h = o$, le volume du segment est nul; donc, la fonction cherchée est de la forme $Ah^3 + Bh^2 + Ch$; c'est-à-dire qu'elle ne renferme aucun terme indépendant de h. Il est de plus à remarquer que le coefficient C de la première puissance de h ne peut être négatif, car, en donnant à h une valeur positive suffisamment petite, le signe de $Ah^3 + Bh^2 + Ch$ est le même que celui de C.

Cela posé, considérons un cylindre ayant même base et même hauteur que le segment, son volume aura pour expression $2\pi rh^2 - \pi h^3$. Et, comme le segment est entièrement contenu dans l'intérieur du cylindre, il en résulte l'inégalité

$$Ah^3 + Bh^2 + Ch < 2\pi rh^2 - \pi h^3,$$

d'où

$$C < 2\pi rh - \pi h^3 - Ah^2 - Bh.$$

Si l'on fait converger h vers zéro, le second membre de cette inégalité devient moindre que toute quantité positive donnée, donc $C = o$.

Pour déterminer les valeurs de A et B, on remarquera qu'en remplaçant successivement h par r et $2r$, le volume du segment prend les valeurs $\frac{2}{3}\pi r^3$, $\frac{4}{3}\pi r^3$; de sorte qu'on a

$$Ar^3 + Br^2 = \frac{2}{3}\pi r^3, \quad \text{et} \quad 8Ar^3 + 4Br^2 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

ou

$$Ar + B = \frac{2}{3}\pi r \quad \text{et} \quad 2Ar + B = \frac{\pi r}{3}.$$

Ces dernières équations donnent

$$A = -\frac{\pi}{3}, \quad B = \pi r.$$

Par conséquent, la fonction cherchée est

$$\pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Note. Cette question a été, il y a quelques années, adressée plusieurs fois par M. Comte à des candidats pour l'admission à l'École Polytechnique, aucun d'eux ne l'a résolue (*). Il n'existait alors aucun *Programme officiel;* les questions de fantaisie avaient un libre cours. Je crois qu'elles n'ont jamais servi à éclairer le jugement de MM. les Examinateurs sur l'intelligence et l'instruction des candidats qu'ils ont examinés. Je reviendrai sur ce sujet. G.

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir page 243);

Par M. VANNSON.

Théorème. *Si au centre d'une ellipse on fait un angle droit et qu'on prolonge ses côtés jusqu'à la rencontre du cercle principal aux points* A *et* B, *qu'on projette les points* A *et* B *sur l'axe commun, au moyen des arcs* AP, BQ *coupant l'ellipse en* A′, B′, *qu'on trace les arcs* OA′, OB′, *on aura construit un système de diamètres conjugués.*

En effet, nommons α, α' les angles de OA′, OB′ avec l'axe; x', y' les tangentes des coordonnées de A′; x'', y'' celles de B′, nous aurons

$$\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' = \frac{y'\,y''}{x'\,x''};$$

(*) La solution qu'on a voulu déduire de la détermination du maximum et du minimum d'une fonction continue n'est pas rigoureuse.

mais si on appelle Y', Y'' les tangentes des coordonnées de A, B, on aura

$$y'\,y'' = \frac{Y'\,Y''\,b^2}{a^2},$$

donc

$$\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,\alpha' = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{Y'}{x'}\cdot\frac{Y''}{x''} = -\frac{b^2}{a^2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. Dans le triangle rectangle AOP on a

$$x' = a \cos \text{AOP},$$

et de même

$$x'' = -a \sin \text{AOP},$$

donc

$$x_{,}^2 + x_{,,}^2 = a^2;$$

on verra de la même manière que

$$y_{,}^2 + y_{,,}^2 = b^2.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, on a la relation

$$a_{,}^2 + b_{,}^2 = a^2 + b^2.$$

2°. Si on appelle φ l'angle OAP, on voit sur la figure qu'on a

$$a' \cos \alpha = a \cos \varphi;$$

de même, en construisant le cercle principal sur le second axe, on aura

$$b' \sin \alpha' = b \cos \varphi;$$

en multipliant ces égalités membre à membre, on a

$$a'\,b' \sin \alpha' \cos \alpha = ab \cos^2 \varphi,$$

on trouve de même

$$a'\,b' \sin \alpha \cos \alpha' = -ab \sin^2 \varphi;$$

d'où par soustraction

$$a'\,b' \sin(\alpha' - \alpha) = ab.$$

3°. L'égalité

$$x_{,}^{2} + x_{,,}^{2} = a^{2}$$

peut s'énoncer ainsi :

La somme des tangentes carrées des projections de deux demi-diamètres conjugués sur un des axes égale la tangente carrée de la moitié de cet axe ; enfin on a la relation

$$a^{2} \cos^{2} \varphi + b^{2} \sin^{2} \varphi = a_{,}^{2},$$

c'est-à-dire que la somme des tangentes carrées des projections des deux axes sur un diamètre égale la tangente carrée de la moitié de ce même diamètre.

Ces relations donnent la solution d'un grand nombre de problèmes relatifs à l'ellipse sphérique ; nous nous bornerons aux principaux.

1. Connaissant deux diamètres conjugués α', $6'$ et leur angle θ, trouver la grandeur des axes. On trouve

$$a+b = \sqrt{a_{,}^{2} + b_{,}^{2} - 2a'\, b' \sin \theta}, \quad a-b = \sqrt{a_{,}^{2} + b_{,}^{2} + 2a'\, b' \sin \theta}.$$

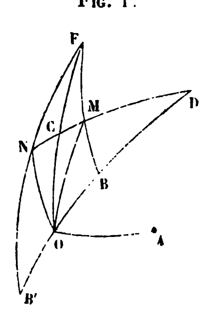
Si on se reporte à l'équation d'un petit cercle en coordonnées obliques, on est conduit à la construction suivante :

Soient

$$\text{OA} = \alpha', \quad \text{OB} = 6',$$

et l'angle $\text{O} = \theta$. Faisons au point O l'angle droit AOC

Fig. 1.



et prenons

$$OC = OA,$$

prenons aussi l'arc

$$OBD = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad OCF = \frac{\pi}{2},$$

joignons C, D et F, B, soit M la rencontre..., tang OM représentera $a + b$; prenons ensuite $OB' = OB$, joignons F à B', et soit N la rencontre des arcs FB' et DC; on aura

$$\text{tang}\, ON = a - q,$$

d'où on tire

$$a = \frac{\text{tang}\, OM + \text{tang}\, ON}{2}, \quad b = \frac{\text{tang}\, OM - \text{tang}\, ON}{2},$$

expressions que nous avons déjà construites.

Pour trouver la direction des axes, nous avons les relations

$$\alpha' - \alpha = \theta \quad \text{et} \quad \text{tang}\, \alpha\, \text{tang}\, \alpha' = -\frac{b^2}{a^2};$$

si nous nommons β le supplément de α', nous aurons

$$\alpha + \beta = \pi - \theta \quad \text{et} \quad \text{tang}\, \alpha\, \text{tang}\, \beta = \frac{b^2}{a^2};$$

le problème revient donc à partager un arc donné $\pi - \theta$ en deux segments tels, que le produit de leurs tangentes égale $\frac{b^2}{a^2}$ (question déjà résolue géométriquement).

Connaissant trois des six quantités a, b, a', b', α, α', on propose de trouver les trois autres.

Problème I. *On donne* a, b, α, *trouver* a', b', α'.

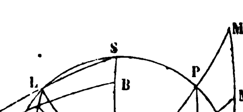
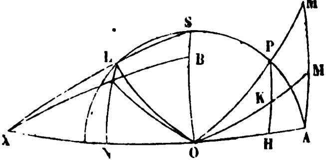
Soient

$$OA = a, \quad OB = b \quad \text{et} \quad MOA = \alpha;$$

cela revient à trouver l'intersection de l'ellipse, sans la construire, avec le cercle OM.

Pour cela, j'élève AM perpendiculaire à OA, et je

Fig. 2.

prends AM′ tel, qu'on ait

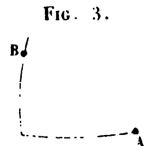
$$\frac{\text{tang AM}'}{\text{tang AM}} = \frac{\text{tang } a}{\text{tang } b};$$

je trace l'arc OM′; soit P sa rencontre avec le cercle principal; menons l'ordonnée PH; le point K où elle coupe OM sera évidemment l'extrémité de a'. Construisons l'angle droit POL, prolongeons l'arc SL jusqu'en X, tirons BX; la rencontre de cet arc avec l'ordonnée LN sera l'extrémité du diamètre b'.

Remarque. Le procédé que nous venons d'employer pour construire la rencontre d'un grand cercle OM avec une ellipse non construite, mais dont on a les axes, s'applique à une position quelconque du cercle sécant, en sorte qu'un problème peut être regardé comme résolu graphiquement si on le ramène à trouver l'intersection d'un grand cercle et d'une ellipse dont on a les axes en grandeur et en direction.

Problème II. *On donne* a, b, a′, *trouver les trois autres quantités.*

Fig. 3.



Considérons ces trois nombres donnés comme des tangentes, et soient x', y' les tangentes des coordonnées de l'extrémité du diamètre donné; on a

$$x' = a' \cos\alpha, \quad y' = a' \sin\alpha.$$

Portant ces valeurs dans l'équation de la courbe, on a

$$\frac{1}{a_,^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}.$$

On tire de là une valeur de $\tan\alpha$ facile à construire au moyen des propriétés du triangle rectangle et en se rappelant l'équation du petit cercle $x^2 + y^2 = r^2$.

Problème III. *On donne* a′, b′, α (a′, b′ *étant des tangentes*).

On vient de trouver la relation

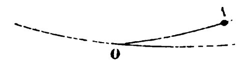
$$\frac{1}{a_,^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2},$$

et on a

$$b^2 = a_1^2 + b_1^2 - a^2,$$

ce qui donne pour trouver a^2 une équation du deuxième

Fig. 4.



degré. La condition de réalité des racines est

$$b_,^2 > 2a_,^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

ou

$$b_1^2 > a_1^2 \sin 2\alpha.$$

Si on prend pour b'^2 cette valeur minimum, on trouve que

$$\tan\alpha' = -1.$$

Ce qui démontre le théorème suivant :

Étant donnés les directions des axes d'une ellipse et un point A, *parmi toutes les ellipses qu'on peut construire avec ces données, il y en a une dans laquelle le conjugué du diamètre* OA *est un minimum, et dans cette ellipse la direction du conjugué divise l'angle des axes en deux parties égales.*

Pour la construire, il faut résoudre le problème suivant :

PROBLÈME IV. *On donne* a', α, α', *trouver les trois autres quantités*, a' *désigne un arc.*

Soient

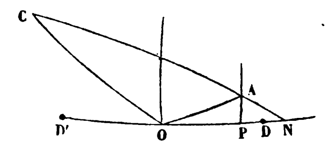
$$\mathrm{AON} = \alpha, \quad \mathrm{CON} = \alpha', \quad \mathrm{OA} = a'.$$

Si nous prenons

$$\mathrm{OC} = \frac{\pi}{2}$$

et que nous menions l'arc CA, il sera tangent à l'ellipse

FIG. 5.



proposée. Donc appelant a la tangente de l'axe suivant ON, on aura

$$a^2 = \mathrm{tang\,ON}\ \mathrm{tang\,OP},$$

ce qui permet de trouver géométriquement la grandeur de l'axe DD'. Le reste se trouve par des moyens déjà exposés.

Nous n'examinerons pas ici les autres cas qui se résolvent par des constructions analogues aux précédentes.

Si l'on prend pour axes de coordonnées un système de

diamètres conjugués, il est évident que l'équation conservera la même forme. On peut donc rapporter la courbe à deux diamètres par la transformation des coordonnées; le calcul se fait comme pour les courbes planes.

QUESTIONS D'EXAMEN

(Admissibilité à l'École Polytechnique).

I. *Lorsque l'équation générale du second degré à trois variables*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy \\ &+ 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0, \end{aligned}\right.$$

représente un cylindre parabolique, la fonction homogène

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$$

formée des termes du second degré est un carré exact.

En effet, lorsque l'équation (1) représente un cylindre parabolique, on a (page 237)

$$a = \frac{b'b''}{b}, \quad a' = \frac{bb''}{b'}, \quad a'' = \frac{bb'}{b''}.$$

En remplaçant a, a', a'' par ces valeurs dans la fonction,

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy,$$

elle devient

$$\frac{b'b''}{b}x^2 + \frac{bb''}{b'}y^2 + \frac{bb'}{b''}z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy,$$

ou

$$bb'b''\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{b''}\right)^2.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

En supposant toujours que l'équation (1) représente un cylindre parabolique, on voit, d'après ce qui précède, que cette équation revient à

$$\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{b''}\right)^2+\frac{1}{bb'b''}\left(2cx+2c'y+2c''z+d\right)=0.$$

Elle résulte évidemment de l'élimination d'une indéterminée α, entre les équations

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{b''}=\alpha,$$

$$\frac{1}{bb'b''}\left(2cx+2c'x+2c''z+d\right)=-\alpha^2.$$

Ces deux dernières équations représentent, par conséquent, les génératrices rectilignes du cylindre parabolique. Ces génératrices sont parallèles à la droite

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{b''}=0,\quad 2cx+2c'y+2c''z+d=0.$$

G.

La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 314

(voir t. XV, p. 27);

PAR J.-CH. DUPAIN.

Construire la courbe à équation polaire

$$\rho^2=\frac{1}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

La forme générale se reconnaît assez bien au moyen de l'équation; mais il est plus commode pour certains détails de prendre les coordonnées rectangulaires

$$y^4(c^2-1)-(2-c^2)x^2y^2-x^4+1=0.$$

En suivant les méthodes ordinaires de discussion, on arrive aux résultats suivants :

Il est inutile de tenir compte des valeurs négatives de ρ pourvu que φ varie de 0° à 360 degrés.

La courbe est symétrique par rapport aux axes coordonnés; il suffit donc d'en étudier le quart.

Il y a cinq cas principaux à distinguer :

1°. $c^2<1$. La courbe est fermée; elle présente l'aspect d'une ellipse dont le petit axe serait dirigé suivant l'axe polaire. Le plus petit rayon vecteur est l'unité, le plus grand $\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}$.

2°. $c^2=1$. On peut écrire

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi}}.$$

l'aspect de la courbe est celui d'une branche de conchoïde $\left(\rho=\dfrac{a}{\cos\varphi}+b\right)$ qui serait répétée symétriquement par rapport à sa directrice $\left(\rho=\dfrac{a}{\cos\varphi}\right)$. L'axe des y est une asymptote commune aux branches de la courbe; il y a quatre inflexions.

3°. $2>c^2>1$. Il y a deux asymptotes ayant pour équations

$$\sin\varphi=\pm\frac{1}{a}\quad\text{ou}\quad y=\frac{x}{\pm\sqrt{c^2-1}}.$$

L'ordonnée positive de la courbe est plus petite que celle

de l'asymptote. L'angle asymptotique qui renferme chaque branche de courbe est obtus.

y commence à être réel quand

$$x^4 = \frac{4(c^2-1)}{c^4},$$

et alors

$$y = \pm \frac{\sqrt{2-c^2}}{c},$$

la tangente est parallèle aux ordonnées. Quand x augmente, y prend quatre valeurs égales deux à deux, sauf le signe, jusqu'à ce que $x = 1$; y n'a plus que trois valeurs

$$+\sqrt{\frac{2-c^2}{c^2-1}}, \quad 0, \quad -\sqrt{\frac{2-c^2}{c^2-1}}.$$

Le point $(1,0)$ est un sommet de la courbe. L'ordonnée n'a plus ensuite que deux valeurs de signes contraires, et la courbe se rapproche de ses asymptotes. Il y a dans le voisinage du sommet une inflexion pour chaque quart de la courbe dont l'aspect est celui des branches infinies de la courbe du *Diable* $(y^4 - x^4 - 96\, a^2 y^2 + 100\, a^2 x^2 = 0)$ étudiée par Lacroix dans ses *Éléments de calcul différentiel,* et par MM. Briot et Bouquet (*Géométrie analytique*, 2e édition, p. 197).

4°. $c^2 = 2$. L'équation se simplifie et peut s'écrire

$$\rho^2 = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \quad \text{ou} \quad y^4 - x^4 = -1.$$

La courbe a le même aspect que l'hyperbole équilatère $(y^2 - x^2 = -1)$ qui a mêmes asymptotes qu'elles, mêmes sommets et mêmes tangentes aux sommets.

5°. $c^2 > 2$. L'aspect général de la courbe est encore celui d'une hyperbole ayant les mêmes asymptotes, mêmes

sommets, mêmes tangentes aux sommets. L'angle des asymptotes est aigu.

L'aire de la courbe est une fonction elliptique de première espèce

$$\frac{1}{2}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{2}\mathrm{F}(c,\varphi).$$

La différentielle développée donne une série convergente lorsque $c\sin\varphi<1$,

$$\frac{1}{2}d\varphi\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{2}c^2\sin^2\varphi+\frac{1.3}{2.4}c^4\sin^4\varphi+\ldots\\ +\frac{1.3.5\ldots,2p-1}{2.4.6\ldots,2p}c^{2p}\sin^{2p}\varphi\ldots\end{array}\right\}.$$

L'intégrale générale n'est pas simple; mais on peut remarquer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2p-1}{2p},$$

et, par suite,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\pi\left\{\begin{array}{l}1+\left(\frac{1}{2}c\right)^2+\left(\frac{1.3}{2\,4}c^2\right)^2+\ldots\\ +\left[\frac{1.3\,5\ldots,(2p-1)}{2\,4.6\ldots2p}c^p\right]^2+\ldots\end{array}\right\}.$$

Cette série n'est convergente que si c est inférieur à l'unité.

Note du Rédacteur. Il est urgent de diriger l'attention des élèves sur cette courbe, une des plus importantes de l'époque actuelle, d'après l'emploi de son aire dans les sciences physiques. Nous en dirons autant de la courbe *gamma*.

SOLUTION DE LA QUESTION 420

(voir p. 32);

PAR M. BARDIN,
Élève de l'Ecole secondaire de Tournus (classe de M. Andanson).

(KEPLER, *Astronomia nova.*)

La résolution des triangles ABC, ACD (trigonométrie) nous donne les angles ABC que je nomme B, ACB, ACD dont je nomme la somme C, et les côtés BC que j'appelle b, CD que j'appelle c. Je les considère comme déjà connus. Je nommerai r chacun des rayons égaux OB, OC, OD, o l'angle AOB, e l'excentricité AO, à trouver. Je prendrai pour inconnues auxiliaires, γ l'angle OCD formé par le rayon OC et le côté CD, ε l'angle ABO formé par le rayon OB et le côté AB.

Cela posé, remarquons que

$$\frac{b}{2} = r\cos.(c-\gamma) = r(\cos.C\cos.\gamma + \sin C\sin\gamma),$$

et

$$\frac{c}{2} = r\cos\gamma,$$

d'où

$$(1)\qquad r = \frac{c}{2\cos\gamma}.$$

Substituant dans l'équation précédente, il vient

$$b = c(\cos.C + \sin C\tang\gamma),$$

d'où

$$\tang\gamma = \frac{b - c\cos.C}{c\sin C};$$

posant

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{c \cos . C}{b},$$

on a

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{b \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{c \sin C \cos \frac{\pi}{4} \cos \varphi};$$

γ étant connu, l'équation (1) donne la valeur de r.

Alors, en observant que

$$\text{OBC} = \text{BCO} = \text{C} - \gamma,$$

et que par suite

$$\varepsilon = \text{B} + \gamma - \text{C},$$

on voit que dans le triangle AOB on connaît

$$\text{AB} = a, \quad \text{OB} = r,$$

et enfin

$$\varepsilon = \text{B} + \gamma - \text{C}.$$

On n'a plus qu'à résoudre ce triangle à l'instar des deux autres.

On obtient ainsi l'angle o et l'excentricité e.

Tous calculs faits, on trouve

$$r = 106485,$$
$$o = 152^\circ\ 25'\ 50'',$$
$$e = 61082.$$

Je placerai comme points de repère, les principaux résultats intermédiaires

$$\text{B} = 78^\circ\ 44'\ \ 0'',$$
$$\text{ACB} = 74^\circ\ 10'\ 43'',$$
$$b = 77193,4;$$

$$\text{ACD} = 31^\circ\ \ 8'\ 39'',$$
$$\text{ADC} = 34^\circ\ 49'\ \ 9'',$$
$$c = 171048.$$

$$\varphi = 30^\circ\ 20'\ 49'',$$
$$\gamma = 36^\circ\ 34'\ 16'',$$
$$\text{ABO} = \ 9^\circ\ 58'\ 54'',$$
$$\text{BAO} = 17^\circ\ 35'\ 16''.$$

Remarque. Comme vérification, on peut calculer e au moyen du triangle AOC ou du triangle AOD. Pour la vérification de o, on peut remarquer que l'on doit avoir

$$\text{CAO} + \text{BAO} = \text{BAC}.$$

Note du Rédacteur. Képler fait ce calcul pour prouver que Mars ne peut se mouvoir dans un cercle. Les données se rapportent à trois observations de cette planète, réduites au mois d'octobre.

A est le lieu de l'observation (Prague, Observatoire de Tycho).
B est le lieu de Mars....... 5° 24′ 21″. Balance.
C est le lieu de Mars....... 8° 19′ 4″. Vierge.
D est le lieu de Mars....... 14° 16′ 52″. Taureau.

Ce sont des observations réduites à l'écliptique pour l'équinoxe de 1590. Si l'orbite était un cercle, on devrait toujours trouver la même excentricité, n'importe les distances AB, AC, AD; or cela n'a pas lieu, car, en prenant le rayon OB = 100000, Képler trouve 9768 pour excentricité, et pour d'autres positions 9264; il conclut qu'il faut exclure le cercle, et finalement il parvient à l'ellipse.

Cet ouvrage, *Astronomia nova,* très-rare (*), est le chef-d'œuvre des chefs-d'œuvre. On voit ce que peut produire la réunion de ces trois qualités, grand astronome, grand géomètre, ami passionné et désintéressé de la science.

(*) Un exemplaire à la librairie de M. Mallet-Bachelier.

GÉOMÉTRIE.

Extrait du *Bulletin de la classe physique et mathématique de Saint-Pétersbourg*, t. XVI, n° 561 ; 1857.

OSCAR VERNER. *Quelques nouveaux théorèmes sur les polygones et propositions arithmétiques et géométriques qui s'en déduisent.*

Soit un polygone fermé plan $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-2} A_{n-1} A_n$ et deux points M, A_0 dans ce plan ; on a cette relation entre les aires triangulaires

$$\frac{MA_1A_n}{MA_0A_1 \, . \, MA_0A_n} = \frac{MA_1A_2}{MA_0A_1 \, . \, MA_0A_2} + \frac{MA_2A_3}{MA_0A_2 \, . \, MA_0A_3} + \frac{MA_3 \, . \, A_4}{MA_0A_3 \, . \, MA_0A_4} + \ldots + \frac{MA_{n-1}A_n}{MA_0A_{n-1} \, . \, MA_0A_n},$$

qui peut s'écrire

$$\sum_1^n \left(\frac{MA_pA_{p+1}}{MA_0A_p \, . \, MA_0A_{p+1}} \right) = 0 ;$$

il faut prendre 1 au lieu de $n+1$ et négativement (*voir* p. 296).

J. MENTION. *Sur le cercle focal des sections coniques.*

1. Par deux points situés sur une conique, menons quatre rayons vecteurs aux foyers ; ils forment un quadrilatère non convexe, circonscriptible à un cercle : c'est le *cercle focal*, et le rayon de ce cercle est appelé le *rayon focal*. Le centre est le pôle de la corde qui réunit

les deux points de la conique. Dans la parabole, deux des rayons vecteurs deviennent des diamètres.

2. Supposons la conique rapportée à ses axes principaux. Soient α, β les coordonnées du centre du cercle focal, K le rayon focal ; on a la relation

Pour l'ellipse....... $a^2K^2 = a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2$,

Pour l'hyperbole.... $a^2K^2 = a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2b^2$,

où a est le demi-axe focal, et b l'autre demi-axe.

Dans la parabole, $K^2 = \beta^2 - 2p\alpha$, où p est le demi-paramètre.

3. La somme des deux tangentes menées par les foyers au cercle focal est égale à l'axe focal dans l'ellipse ; c'est la différence dans l'hyperbole (*).

4. La longueur d'une tangente menée d'un foyer au cercle focal est à la distance du centre de ce cercle à la directrice correspondante au foyer, dans un rapport conforme au *module* de la conique.

5. L'aire d'un polygone circonscrit à la conique est égale à $a(K + K' + K'' + \ldots)$; K, K′, K″..., sont les rayons focaux relatifs aux côtés du polygone, dont quelques-uns deviennent négatifs lorsque le centre de la conique est extérieur au polygone.

6. L'aire d'un polygone inscrit à une conique est

$$ab^2\left(\frac{K}{b^2+K^2} + \frac{K'}{b^2+K'^2} + \frac{K''}{b^2+K''^2} + \ldots\right),$$

K, K′, K‴, ..., sont les rayons focaux correspondants aux

(*) Lorsque les deux points se réunissent, le double point représente le cercle focal et son centre ; les deux rayons vecteurs sont des tangentes à ce cercle, et ainsi la propriété de ces rayons est un cas particulier : de même pour la propriété suivante. Tm.

côtés du polygone; dans la parabole, la surface du polygone circonscrit est

$$\frac{K^3 - K'^3 - K''^3 \ldots}{3p},$$

inscrit

$$\frac{2(K^3 - K'^3 - K''^3 \ldots)}{3p}.$$

7. *Secteur elliptique.* Ce secteur ayant pour sommet le centre de l'ellipse a pour aire a arc tang $\frac{K}{b}$, où K est le rayon focal correspondant à la corde qui sous-tend la base du secteur.

8. *Secteur hyperbolique.*

$$\frac{ab}{2}\log\frac{b-K}{b+K};$$

on le déduit du secteur elliptique en y remplaçant b par bi, car

$$\text{arc tang}\,\frac{bi}{K} = \frac{1}{2i}\log\frac{1+\frac{K}{b}}{1-\frac{K}{b}}; \quad i = \sqrt{-1}.$$

9. *Segment elliptique.*

$$\text{Aire} = ab\left(\text{arc tang}\,\frac{K}{b} - \frac{\frac{K}{b}}{1+\frac{K^2}{b^2}}\right).$$

10. *Segment parabolique.*

$$\text{Aire} = \frac{2K^3}{3p}.$$

11. α, β étant les coordonnées du centre d'un cercle focal, la conique étant rapportée à des axes quelconques,

on a

$$K^2 = -\frac{2F'\sin^2 v}{N + \sqrt{N^2 + m\sin^2 v}};$$
$$F' = A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + D\beta + E\alpha + F,$$
$$\gamma = \text{angle des axes},$$
$$N = A + C - B\cos\gamma, \quad m = B^2 - 4AC.$$

12. *Solution de ces problèmes.* Étant donnés cinq centres focaux d'une conique, trouver l'équation de la conique; quatre pour une parabole et hyperbole équilatère; trois pour un cercle: dans ce cas, c'est le cercle qui coupe orthogonalement les trois cercles donnés. Au moyen du paragraphe précédent, on est amené à cinq équations du 1er degré.

12. Théorème. *Si trois sections coniques passent par les mêmes quatre points, les rayons focaux des points de l'une des coniques relatifs aux deux autres sont dans un rapport constant,* ce qui comprend comme cas particulier ce théorème de la *Géométrie supérieure* :

Si trois cercles ont le même axe radical, les tangentes menées par tous les points de l'un des cercles aux deux autres sont dans un rapport constant.

L'auteur fait encore diverses applications, et annonce une prochaine publication sur la *sphère focale* d'un cône.

Note du Rédacteur. M. Tchebychew, le célèbre arithmologue dont il va être question, a pour prénom Pafnoufty (*Bulletin,* p. 63). M. Bienaymé me fait observer que ce saint est identique à saint Paphnuce qui figure dans certains calendriers à la date du 19 avril et du 11 au 24 septembre, et il y a même plusieurs saints de ce nom, tous d'Égypte; origine indiquée d'ailleurs par la forme du nom.

SOLUTION DE LA QUESTION 356

(voir t. XVI, p. 57)

QUI CONDUIT A CELLE DE LA QUESTION 347

(voir t. XV, p. 387);

PAR M. P. DE FOVILLE,
Élève de l'École préparatoire des Carmes (classe de M. Gerono).

1°. *ntée par l'équation*

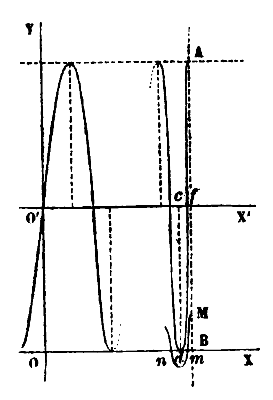
(1) $y = \text{si}$ n a $\sin x] + 1$.

2°. *si* $\varphi(x)$ *t une fonction impaire qui n'a pas plus de* $2n - 1$ *racines comprises entre* $+1$ *et* -1, *la courbe rep ée par l'équation*

(2) y

rencontre la courbe (1 *en un point dont l'abscisse est comprise entre* $+$ -1.

3°. ***Déduire de ce qui précède la démonstration du théorème de M. Tchebychew*** **(question 347, t. XV, p. 387, Prouhet.)**



1°. Je suppose que OX, OY soient les axes rectangulaires donnés. Afin de simplifier la discussion, je prendrai provisoirement pour axe des X la droite O'X' dont l'équation est

$$y = 1;$$

l'équation de la courbe deviendra

$$y = \sin[(2n+1) \operatorname{arc} \sin x].$$

On reconnaît immédiatement que la nouvelle origine O' est un point de la courbe et un centre, car cette équation, vérifiée par les valeurs $x = 0$, $y = 0$, conserve les mêmes solutions lorsqu'on change à la fois x en $-x$ et y en $-y$.

La variable x représentant un sinus ne peut recevoir que les valeurs comprises entre $+1$ et -1; à chacune de celles qui sont renfermées dans cet intervalle, il en correspond une infinité de arc $\sin x$, mais cependant une seule de y. En effet, si α représente la plus petite valeur positive de arc $\sin x$, toutes les autres sont données par les formules

$$2k\pi + \alpha, \quad (2k+1)\pi - \alpha,$$

et l'équation proposée peut être remplacée par l'ensemble des deux suivantes :

$$y = \sin[(2n+1)(2k\pi + \alpha)],$$
$$y = \sin\{(2n+1)[(2k+1)\pi - \alpha]\}.$$

Celles-ci se réduisent, lorsque l'on supprime les multiples inutiles de la circonférence, à

$$y = \sin[(2n+1)\alpha],$$
$$y = \sin[\pi - (2n+1)\alpha],$$

et l'on voit qu'elles sont équivalentes. Il suffit donc de con-

server l'une d'elles, soit

$$y = \sin[(2n+1)\alpha],$$

qui pour chaque valeur de α et de x n'en donne bien qu'une seule de y.

Pour obtenir les points de la branche de courbe située à droite de l'axe des Y, il faut faire croître x de 0 à 1, ou, ce qui revient au même, faire croître α de 0 à $\frac{\pi}{2}$. On peut la construire avec une certaine exactitude au moyen du tableau suivant qui montre en regard les valeurs simultanées les plus remarquables de x et de y :

α	y
$\frac{\pi}{2(2n+1)}$	1
$\frac{2\pi}{2(2n+1)}$	0
$\frac{3\pi}{2(2n+1)}$	-1
....	
$\frac{(2n-3)\pi}{2(2n+1)}$	1
$\frac{(2n-2)\pi}{2(2n+1)}$	0
$\frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)}$	-1
$\frac{2n\pi}{2(2n+1)}$	0
$\frac{(2n+1)\pi}{2(2n+1)}$	1

Si l'on remarque que l'ordonnée et sa dérivée seconde,

respectivement représentées par

$$\sin[(2n+1)\alpha]$$

et

$$-(2n+1)^2 \sin[(2n+1)\alpha],$$

sont toujours de signes contraires, que par conséquent la courbe tourne constamment sa concavité vers l'axe des X, on reconnaît que, partant de l'origine, elle se compose d'une série d'arcs sinueux qui successivement s'élèvent au-dessus et s'abaissent au-dessous de cet axe, et qu'elle vient enfin se terminer brusquement au point dont les coordonnées sont $x=1, y=1$.

Chaque valeur de x qui rend $(2n+1)\alpha$ multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ correspond à une ordonnée maximum ou minimum dont la longueur absolue est toujours égale à 1. Dans l'intervalle de deux de ces ordonnées consécutives, la courbe rencontre nécessairement l'axe des X en un point dont l'abscisse rend $(2n+1)\alpha$ multiple de π. Les points d'intersection sont au nombre de n à droite de l'axe des Y. Comme il s'en trouve autant sur la branche de gauche, symétrique par rapport au centre de celle qui vient d'être construite, et que de plus l'origine O' appartient à la courbe, le nombre total des points où elle coupe l'axe O' X' est $2n+1$. On achève de prendre une idée exacte de sa forme, en remarquant que l'intervalle de deux de ces points consécutifs devient de plus en plus petit à mesure qu'ils s'éloignent de l'origine. En effet, leurs abscisses sont les sinus d'arcs équidistants l'un de l'autre de $\frac{\pi}{2n+1}$, et l'on sait que dans le premier quadrant le rapport $\frac{x}{\arcsin x}$ diminue lorsque x augmente.

2°. Il faut maintenant revenir au premier système d'axes, et faire voir que si $\varphi(x)$ est une fonction impaire

ayant au plus $2n - 1$ racines comprises entre $+1$ et -1, la courbe représentée par l'équation

$$y = \varphi(x)$$

coupe nécessairement l'espèce de sinusoïde qui vient d'être construite.

J'observe d'abord que puisque $\varphi(x)$ change de signe tout en conservant la même valeur absolue lorsqu'on y remplace x par $-x$, la courbe $y = \varphi(x)$ a l'origine O pour centre. Profitant de cette remarque, je vais chercher à établir la propriété en question, en montrant que d'un point de la droite AB dont l'équation est $x = 1$ au point symétrique par rapport à O de A′B′ dont l'équation est $x = -1$, il est impossible de tracer une courbe qui ne rencontre pas la sinusoïde et soit telle, qu'à chaque valeur de x en corresponde une seule de y, sans qu'elle ait au moins $2n + 1$ points d'intersection avec OX. Il n'y aurait pas lieu à démonstration si la valeur de y correspondant à $x = 1$ était négative ou si elle était positive et plus grande que 1, car alors la courbe ayant l'origine pour centre couperait évidemment la sinusoïde. Je supposerai donc que le point pris sur AB soit comme M compris entre A et B. Une branche de courbe partant de ce point et se dirigeant vers l'origine sans couper la sinusoïde peut présenter une forme quelconque dans l'intervalle compris entre le dernier arc dfA de celle-ci et la droite AB; mais il est impossible qu'elle passe à gauche de l'ordonnée cd sans couper l'axe des X en un certain point m compris entre d et B, et de s'abaisser au-dessous de cet axe. La branche symétrique qui part de M′ le coupera en un point correspondant m' et s'élèvera au-dessus de lui, mais elle ne pourra passer à droite de $c'd'$ (symétrique à cd) sans le couper une nouvelle fois en un point n' auquel correspondra de même un point n de l'autre branche

situé sur OX. En continuant de cette manière à tracer simultanément les deux branches qui tendent l'une vers l'autre pour se réunir, on reconnaît que la courbe dont elles font partie doit couper OX en deux points, chaque fois que se présente une ordonnée minimum de la sinusoïde dont il faut éviter la rencontre. L'ordonnée terminale A'B' est la seule qui se trouve naturellement évitée. Les autres sont au nombre de n. La courbe tracée entre M et M' ne peut donc avoir moins de $2n+1$ points d'intersection avec l'axe des X (le nombre de ces points est nécessairement impair), et celle que représente l'équation

$$y=\varphi(x)$$

en ayant au plus $3n-1$ dans l'intervalle des mêmes ordonnées doit couper la sinusoïde.

3°. Le théorème de M. Tchebychew est ainsi énoncé (question 347) :

Soit donnée l'équation

$$x^{2n+1}+ax^{2n-1}+bx^{2n-3}+\ldots+lx+k=0$$

qui ne renferme que des puissances impaires, il y a une racine réelle comprise entre $2\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$ *et* $-2\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$.

Il revient évidemment au même de dire que l'équation obtenue en divisant par $2\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$ les racines de la précédente a une racine comprise entre $+1$ et -1. Le premier des termes de cette nouvelle équation est $2^{2n}.k.x^{2n+1}$, et si on les divise tous par k, ce qui n'altère pas les solutions, elle prend la forme

$$(3)\quad 2^{2n}.x^{2n+1}+\mathrm{A}x^{2n-1}+\mathrm{B}x^{2n-3}+\ldots+\mathrm{L}x+1=0.$$

Le théorème sera démontré si je fais voir que les racines comprises entre $+1$ et -1 peuvent être représen-

tées par les abscisses des points communs aux deux courbes dont les équations sont désignées par (1) et (2) (p. 236).

Pour y parvenir, je rappellerai d'abord que, d'après une formule de la trigonométrie, on a

$$\sin[(2n+1)\alpha] = (2n+1)\cos^{2n}\alpha\sin\alpha - \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}\cos^{2n-2}\alpha\sin^3\alpha + \ldots,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\sin[(2n+1)\operatorname{arc}\sin x] = (2n+1)(1-x^2)^n x - \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}(1-x^2)^{n-1}x^3 + \ldots.$$

Une première remarque à faire sur ce développement, c'est qu'il est une fonction impaire de x. Il se compose en effet d'une somme algébrique de termes où chacun est le produit d'une puissance de $(1-x^2)$ par une puissance impaire de x. Une seconde remarque est relative au coefficient de x^{2n+1}, terme qui est évidemment celui du degré le plus élevé dans chacun des produits dont je viens de parler où il se trouve alternativement avec le signe $+$ et le signe $-$. Pour rendre le raisonnement plus précis, je supposerai d'abord n pair; alors le produit $(1-x^2)^n.x$ fournit le terme $+x^{2n+1}$ tandis que $(1-x^2)^{n-1}x^3$ donne $-x^{2n+1}$; mais comme ce dernier est précédé dans le développement d'un coefficient négatif, c'est encore avec le signe $+$ que x^{2n+1} se retrouve dans la somme : il en résulte que le coefficient de x^{2n+1} est égal à la somme de tous les coefficients numériques du développement, c'est-à-dire de ceux de la $2n+1^{ième}$ puissance du binôme pris de deux en deux, ou encore à la demi-somme $\frac{1}{2}2^{2n+1} = 2^{2n}$ de tous les coef-

ficients de cette formule. Je puis donc poser

$$\sin[(2n+1)\,\text{arc}\sin x]$$
$$= 2^{2n}x^{2n+1} + A'x^{2n-1} + B'x^{2n-3} + \ldots + L'x$$

et remplacer l'équation (1) par l'équation algébrique

$$(1')\quad y = 2^{2n}x^{2n+1} + A'x^{2n-1} + B'x^{2n-3} + \ldots + L'x + 1,$$

dans laquelle il faut seulement convenir de n'attribuer à x que les valeurs comprises entre $+1$ et -1.

Il est maintenant facile de voir que les racines de l'équation (3) sont représentées par les abscisses des points communs à la courbe (1′) et à la suivante

$$y = (A' - A)x^{2n-1} + (B' - B)x^{2n-3} + \ldots + (L' - L)x,$$

dont l'équation est comprise dans l'équation (2); car c'est une fonction impaire de x et n'a pas plus de $2n-1$ racines.

Tout ceci suppose n pair.

Si n était impair, le coefficient de x^{2n+1} dans le développement de $\sin[(2n+1)\,\text{arc}\sin x]$ serait -2^{2n}; mais alors on pourrait remplacer la courbe (1) par celle dont l'équation est

$$y = \sin[(2n+1)\,\text{arc}\sin x] - 1$$

qui rencontre aussi la courbe (2) en un point dont l'abscisse est comprise entre $+1$ et -1. Les termes extrêmes de l'équation (1′) deviendraient ainsi $-2^{m}x^{m+1}$ et -1, et pour que ceux de l'équation (3) leur fussent égaux, il suffirait de changer tous les signes de cette dernière équation : les conclusions auxquelles on parviendrait seraient encore les mêmes.

FACES DU SECOND DEGRÉ, PROBLÈMES;

SOLUTIONS PAR M. VANNSON.

Un ellipsoïde étant rapporté à trois diamètres conjugués, on propose de mener par l'origine un rayon qui soit maximum ou minimum.

L'équation de la surface sera

$$\frac{x^2}{a_{,}^2} + \frac{y^2}{b_{,}^2} + \frac{z^2}{c_{,}^2} = 1.$$

Appelons A, B, C les angles que font les diamètres deux à deux et soient

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{c} = \mathrm{K},$$

les équations d'un rayon quelconque. Éliminant x, y, z entre ces quatre équations, nous aurons

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m^2}{a_{,}^2} + \frac{n^2}{b_{,}^2} + \frac{p^2}{c_{,}^2}}}, \quad x = \frac{m}{\mathrm{R}}, \quad y = \frac{n}{\mathrm{R}}, \quad z = \frac{p}{\mathrm{R}},$$

R désignant le radical; si nous appelons l la longueur du rayon, nous aurons

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos \mathrm{C} + 2yz \cos \mathrm{A} + 2zx \cos \mathrm{B},$$

et, remplaçant x, y, z par leurs valeurs,

$$l^2 = \frac{m^2 + n^2 + p^2 + 2np \cos \mathrm{A} + 2pm \cos \mathrm{B} + 2mn \cos \mathrm{C}}{\frac{m^2}{a_{,}^2} + \frac{n^2}{b_{,}^2} + \frac{p^2}{c_{,}^2}}.$$

Pour rendre cette expression maximum ou minimum,

m, n, p étant trois variables indépendantes, nous égalerons à zéro les dérivées prises successivement par rapport à chacune, ce qui, en divisant les équations ainsi obtenues membre à membre, nous donne

$$(1)\quad \left\{ \frac{m+p\cos B+n\cos C}{\left(\frac{m}{a_{,}^{2}}\right)}=\frac{n+m\cos C+p\cos A}{\left(\frac{n}{b_{,}^{2}}\right)} =\frac{p+n\cos A+m\cos B}{\left(\frac{p}{c_{,}^{2}}\right)}.\right.$$

Appelant S un quelconque de ces rapports, nous aurons les trois équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &m\left(1-\frac{S}{a_{,}^{2}}\right)+n\cos C+p\cos B=0,\\ &n\left(1-\frac{S}{b_{,}^{2}}\right)+p\cos A+m\cos C=0,\\ &p\left(1-\frac{S}{c_{,}^{2}}\right)+m\cos B+n\cos A=0.\end{aligned}\right.$$

Ces trois équations n'ayant pas de terme indépendant, pour que les rapports $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$ soient déterminés, il faut que le dénominateur commun des trois inconnues soit nul, ce qui donne, après quelques réductions faciles,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &S^3-S^2(a_{,}^{2}+b_{,}^{2}+c_{,}^{2})\\ &+S(b_{,}^{2}c_{,}^{2}\sin^2 A+c_{,}^{2}a_{,}^{2}\sin^2 B+a_{,}^{2}b_{,}^{2}\sin^2 C)\\ &+a_{,}^{2}b_{,}^{2}c_{,}^{2}D=0,\end{aligned}\right.$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$-D=1+2\cos A\cos B\cos C-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C.$$

Si on décompose D en facteurs, on trouve aisément

$$D=4\sin p\sin(p-A)\sin(p-B)\sin(p-C),$$

p étant la demi-somme de $(A+B+C)$. Or si on appelle V le volume du parallélipipède formé sur a', b', c', on a

$$V = 2 [illegible] c' \sqrt{\sin p \sin(p-A) \sin(p-B) \sin(p-C)}.$$

De cette remarque il résulte que le terme tout connu de l'équation (3) est égal à $-V^2$, V étant le volume du parallélipipède formé sur les trois diamètres conjugués.

Pour d[illegible]montrer que les trois racines de l'équation (3) sont r[illegible], il n'y a qu'à suivre l'élégante méthode de discussion [illegible] l'analyse de MM. Briot et Bouquet, page 3[illegible].

Ainsi on éliminera dans les équations (2) p par soustraction, on trouve ainsi

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{m}{\left[\dfrac{1}{\cos A\left(\dfrac{S}{a_{,}^2}-1\right)} + \cos B \cos C\right]} \\ = & \frac{n}{\left[\dfrac{1}{\cos B\left(\dfrac{S}{b_{,}^2}-1\right)} + \cos A \cos C\right]} \\ = & \frac{p}{\left[\dfrac{1}{\cos C\left(\dfrac{S}{c_{,}^2}-1\right)} + \cos A \cos B\right]}; \end{aligned} \right.$$

remplaçant dans la première des équations (2) m, n, p par leurs quantités proportionnelles, on trouve

$$(5)\quad \frac{\dfrac{a_{,}^2 \cos B \cos C}{\cos A}}{S-\alpha} + \frac{\dfrac{b_{,}^2 \cos C \cos A}{\cos B}}{S-\beta} + \frac{\dfrac{c_{,}^2 \cos A \cos B}{\cos C}}{S-\gamma} = 1,$$

après avoir posé

$$\alpha = a_{,}^2\left(1 - \frac{\cos B \cos C}{\cos A}\right), \text{ etc.}$$

Tant que les quantités α, 6, γ sont inégales, on démontre que l'équation (5) a ses trois racines réelles et inégales, et elles sont positives, comme le montre l'équation (3). Or ces racines ne sont autres que les carrés des demi-axes. Cela résulte des équations (1), car si on multiplie les deux termes de chaque fraction respectivement par m, n, p, et qu'on divise ensuite la somme des numérateurs par celle des dénominateurs, on trouve $S = l^2$. Ainsi, dans le cas où α, 6, γ sont des quantités différentes, les trois axes sont inégaux. Les équations qui donnent la direction de ces axes sont, en ayant égard aux équations (5),

$$\frac{x \cos A (S - \alpha)}{a_{,}^{2}} = \frac{y \cos B (S - 6)}{b_{,}^{2}} = \frac{z \cos C (S - \gamma)}{c_{,}^{2}}.$$

Ces équations donneront pour chaque valeur de S une direction déterminée.

Si $\alpha = 6$, une des valeurs de S égalera α; les équations (4) donnent dans ce cas $p = 0$, et la dernière des équations (2) devient

$$m \cos B + n \cos A = 0:$$

ainsi les équations d'un des axes sont

$$z = 0 \quad \text{et} \quad x \cos B + y \cos A = 0.$$

Ainsi, quand on a $\alpha = 6$, un des trois axes est dans le plan de deux diamètres conjugués, et réciproquement si dans l'équation $\alpha = 6$ on remplace α et 6 par leurs valeurs, elle devient

$$(6) \quad a_{,}^{2} \left(\frac{\cos A - \cos B \cos C}{\cos A}\right) = b_{,}^{2} \left(\frac{\cos B - \cos A \cos C}{\cos B}\right).$$

Or si on appelle A′ le dièdre opposé à la face A dans

l'angle solide que forment les trois diamètres donnés, on aura

$$\cos A' = \frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

et

$$\cos B' = \frac{\cos B - \cos A \cos C}{\sin A \sin C},$$

valeurs qui, combinées avec l'équation (6), donneront

$$\frac{a_,^2}{b_,^2} = \frac{\left(\frac{\sin 2A}{\cos A'}\right)}{\left(\frac{\sin 2B}{\cos B'}\right)}.$$

On voit donc que dans un système de trois diamètres conjugués, si deux d'entre eux sont dans un même plan avec un axe, le carré de chacun des deux est proportionnel au sinus de deux fois l'angle compris entre les deux autres, divisé par le cosinus du dièdre opposé à cet angle.

Quand les trois quantités α, β, γ sont égales, l'équation (5) a deux racines égales à α, donc la surface a deux axes égaux, elle est de révolution, et il n'y a de déterminé que la direction du troisième axe, correspondante à la troisième racine.

Si dans l'équation (3) on examine la somme des racines, leur produit, etc., on en conclut ces trois relations :

La somme des carrés des diamètres conjugués est constante ; le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constant; et enfin dans ce même parallélipipède, la somme de carrés des faces est toujours la même pour tous les systèmes de diamètres conjugués.

Problème. *Une surface du second degré étant*

éclairée par des rayons de lumière partant d'un point (x', y', z'), *trouver l'équation de la surface conique formée par les rayons tangents à la surface proposée.*

Lemme. Soit $\varphi = 0$ l'équation de la surface; on sait que la courbe de séparation d'ombre et de lumière, base du cône cherché, est plane. Son plan, qui n'est autre que le plan polaire du point (x', y', z'), a pour équation

$$\frac{x}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)' + \frac{y}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)' + \frac{z}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)' + Cx' + C'y' + C''z' + F = 0,$$

$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)'$ représentant la dérivée de φ relative à x, dans laquelle on a remplacé x, y, z par x', y' z'; si dans cette équation du plan polaire, que nous représenterons, pour abréger, par $\psi = 0$, nous remplaçons x, y, z par les lettres accentuées, nous trouverons un résultat égal à $(\varphi)'$, ainsi

$$(1) \qquad (\psi)' = (\varphi)'.$$

Cela posé, prenons l'équation générale des surfaces du second degré passant par la courbe de séparation, son équation sera

$$\varphi + \lambda\psi = 0,$$

λ étant le premier membre de l'équation générale d'un plan. Ainsi λ a quatre indéterminées, ce qui montre que la condition de passer par la courbe donnée tient lieu de cinq points. Si maintenant on cherche l'intersection des deux surfaces, on trouve pour deuxième courbe

$$\lambda = 0, \quad \varphi = 0.$$

Mais cette courbe doit être identique à la première, donc λ et ψ ne diffèrent que par un facteur numérique, donc

$$\lambda = \alpha\psi,$$

ce qui donne pour équation de la surface tangente

$$\varphi + \alpha\psi^2 = 0;$$

mais elle doit contenir le point (x', y', z'), d'où

$$\varphi' + \alpha\psi'^2 = 0,$$

et

$$\alpha = -\frac{1}{\varphi'},$$

en ayant égard à la relation (1). On a donc pour l'équation demandée

$$\varphi'\varphi = \psi^2.$$

Il reste à faire voir que cette équation représente bien la surface d'un cône. Pour cela on peut chercher les coordonnées du centre et remarquer que ces coordonnées vérifient l'équation de la surface. On peut dire encore : si on joint le point (x', y', z') à un point D pris sur la courbe de séparation, cette droite aura trois points communs avec la surface trouvée, le point D étant un point double ou un point de contact de cette droite avec la surface. Donc cette droite est tout entière dans la surface; c'est donc une surface conique.

Si on suppose que les rayons de lumière, au lieu de partir d'un point fixe, soient parallèles à une direction donnée par les angles α, β, γ, la même équation donnera le résultat. Pour cela, appelons l la distance du point à l'origine, nous aurons

$$x' = l\cos\alpha, \quad y' = l\cos\beta, \quad z' = l\cos\gamma.$$

Après avoir substitué ces valeurs aux coordonnées, on fera $l = \infty$, puis on divisera le tout par l^2. Si donc nous appelons $f(\alpha)$ le groupe des termes du deuxième degré, après y avoir remplacé x', y', z' par les trois cosinus, et

par $\psi(\alpha)$ celle du plan polaire après les mêmes substitutions et abstraction faite du terme indépendant, nous aurons pour équation de la surface cylindrique demandée

$$\varphi f(\alpha) = [\psi(\alpha)]^2.$$

Exemples. Considérons les surfaces du second degré rapportées à leurs plans principaux

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \pm 1 = 0,$$

l'équation de la surface du cône sera

$$(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \pm 1)(Ax_{,}^2 + A'y_{,}^2 + A''z_{,}^2 \pm 1)$$
$$= (Axx' + A'yy' + A''zz' \pm 1)^2,$$

et celle de la surface cylindrique tangente sera

$$(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \pm 1)(A\cos^2\alpha + A'\cos^2 6 + A''\cos\gamma)$$
$$= (Ax\cos\alpha + A'y\cos 6 + A''z\cos\gamma)^2.$$

QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE). (Suite.)

(Voir p. 314).

---

2. *Trouver les conditions qui doivent être remplies par les coefficients de l'équation générale du second degré à trois variables*

$$(1)\quad \begin{cases} ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy \\ \quad + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0, \end{cases}$$

pour que cette équation représente le système de deux plans parallèles.

On sait que dans ce cas les trois équations dérivées

$f'(x)=0$, $f'(y)=0$, $f'(z)=0$, doivent représenter trois plans qui coïncident. En exprimant que les coefficients de différents termes de ces équations sont proportionnels, on trouve, par un calcul très-simple, les cinq conditions suivantes :

$$(2)\quad a=\frac{b'b''}{b},\quad a'=\frac{bb''}{b'},\quad a''=\frac{bb'}{b''},\quad c''=\frac{bc}{b''},\quad c'=\frac{bc}{b'}.$$

3. *Lorsque l'équation générale du second degré représente deux plans parallèles, la fonction*

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy,$$

formée des termes du second degré, est, à un facteur près, le carré du polynôme $2cx+2c'y+2c''z$ *qui contient tous les termes du premier degré de cette équation.*

Il en doit être ainsi, car deux plans parallèles pouvant toujours être représentés par

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{et} \quad Ax+By+Cz+D'=0,$$

l'équation (1) aura nécessairement la forme

$$(Ax+By+Cz+D)(Ax+By+Cz+D')=0,$$

ou

$$(Ax+By+Cz)^2+(D+D')(Ax+By+Cz)+DD'=0.$$

On peut aussi conclure cette remarque des relations (2) et trouver les équations de chacun des deux plans.

En effet, si l'on remplace a, a', a'' par leurs valeurs $\frac{b'b''}{b}$, $\frac{bb''}{b'}$, $\frac{bb'}{b''}$ dans la fonction

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy,$$

elle devient

$$bb'b''\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{b''}\right)^2.$$

Et, en substituant à c'' et c' les expressions $\frac{bc}{b''}$, $\frac{bc}{b'}$, on a

$$2cx+2c'y+2c''z=2bc\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{b''}\right).$$

Donc,

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2b'xz+2b''xy$$
$$=(2cx+2c'y+2c''z)^2\times\frac{b'b''}{4bc^2}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

En posant

$$2cx+2c'y+2c''z=X,$$

l'équation (1) se réduit à

$$\frac{b'b''}{4bc^2}\cdot X^2+X+d=0,$$

ce qui revient à

$$\frac{a}{4c^2}X^2+X+d=0,$$

puisque

$$\frac{b'b''}{b}=a.$$

De cette dernière équation on tire

$$X=-\frac{2c^2}{a}\pm\frac{2c}{a}\sqrt{c^2-ad}.$$

D'où

$$\frac{a}{c}X+2c=\pm 2\sqrt{c^2-ad}.$$

Mais

$$\frac{a}{c}X = \frac{a}{c}(2cx + 2c'y + 2c''z) = 2ax + \frac{2ac'}{c}y + \frac{2ac''}{c}z.$$

D'ailleurs, on a [d'après les relations (2)],

$$\frac{2ac'}{c} = 2b'', \quad \frac{2ac''}{c} = 2b';$$

il en résulte

$$\frac{a}{c}X = 2ax + 2b''y + 2b'z,$$

et

$$\frac{a}{c}X + 2c = 2ax + 2b''y + 2b'z + 2c = f'(x).$$

Par conséquent, les équations des deux plans parallèles sont

$$f'(x) = \pm 2\sqrt{c^2 - ad}.$$

Si

$$c^2 - ad = 0,$$

ces deux plans se réduisent à un seul, et lorsqu'on a

$$c^2 - ad < 0,$$

ils deviennent imaginaires.

4. *Déterminer les conditions nécessaires pour que l'équation générale du second degré à trois variables représente une surface de révolution, rapportée à des coordonnées rectangulaires.*

Soient

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface considérée, et

$$(2) \qquad (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - r^2 = 0,$$

celle d'une sphère ayant pour centre un point (x', y', z') de l'axe de révolution. En disposant convenablement du rayon et du centre de la sphère, l'intersection des surfaces (1) et (2) sera formée de deux circonférences *réelles*, situées dans des plans perpendiculaires à l'axe de révolution, et dont les centres appartiendront à cette droite.

Toutes les surfaces du second degré qui contiendront ces deux circonférences, seront représentées par l'équation

$$(3)\quad f(x,y,z)+\lambda[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-r^2]=0,$$

dans laquelle λ est un coefficient arbitraire.

Or, le système des deux plans parallèles où se trouvent les deux circonférences est une surface du second degré qui contient ces deux courbes; donc il doit être possible d'attribuer à λ, x', y', z' des valeurs telles, que l'équation (3) représente le système de deux plans parallèles; il faut, par conséquent, qu'il existe pour λ, x', y', z' des valeurs qui rendent identiques les équations dérivées de l'équation

$$(3)\quad f(x,y,z)+\lambda[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-r^2]=0.$$

En remplaçant $f(x,y,z)$ par

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy$$
$$+2cx+2c'y+2c''z+d,$$

les équations dérivées de (3) deviennent

$$(4)\qquad ax+b''y+b'z+c+\lambda(x-x')=0,$$
$$(5)\qquad b''x+a'y+bz+c'+\lambda(y-y')=0,$$
$$(6)\qquad b'x+by+a''z+c''+\lambda(z-z')=0.$$

Pour qu'elles admettent les mêmes solutions, il faut

qu'on ait

$$(7)\qquad \frac{a+\lambda}{b''}=\frac{b''}{a'+\lambda}=\frac{b'}{b},$$

$$(8)\qquad \frac{a+\lambda}{b'}=\frac{b''}{b}=\frac{b'}{a''+\lambda},$$

$$(9)\qquad \frac{a+\lambda}{c-\lambda x'}=\frac{b''}{c'-\lambda y'}=\frac{b'}{c''-\lambda z'}.$$

Les relations (7) et (8) donnent

$$a+\lambda=\frac{b'b''}{b},\quad a'+\lambda=\frac{bb''}{b'},\quad a''+\lambda=\frac{bb'}{b''};$$

d'où

$$\lambda=\frac{b'b''}{b}-a=\frac{bb''}{b'}-a'=\frac{bb'}{b''}-a''.$$

Ainsi, les coefficients de l'équation générale du second degré devront satisfaire aux deux conditions

$$\frac{b'b''}{b}-a=\frac{bb''}{b'}-a'=\frac{bb'}{b''}-a'',$$

pour que cette équation représente une surface de révolution.

Quand ces deux conditions seront remplies, en prenant pour la valeur de λ l'une quelconque des trois différences

$$\frac{b'b''}{b}-a,\quad \frac{bb''}{b'}-a',\quad \frac{bb'}{b''}-a'',$$

les équations (7) et (8) seront vérifiées. Quant aux équations (9), qui contiennent les trois inconnues x', y', z', elles admettent une infinité de solutions différentes. On en déduit, en remplaçant λ par sa valeur,

$$x'=\frac{b''}{b}z'+\frac{bc-b''c''}{b'b''-ab}\quad\text{et}\quad y'=\frac{b''}{b'}z'+\frac{b'c'-b''c''}{bb''-a'b'}.$$

Ce qui montre que le point (x', y', z') appartient à la fois aux deux plans

$$x = \frac{b''}{b}z + \frac{bc - b''c''}{b'b'' - ab}, \quad y = \frac{b''}{b'}z + \frac{b'c' - b''c''}{bb'' - a'b'}.$$

L'axe de révolution est ainsi déterminé, et il est facile de reconnaître que cette droite est perpendiculaire au plan que chacune des équations (4), (5), (6) représente.

G.

SOLUTION DE LA QUESTION 279

(voir t. XII, p. 327);

PAR M. FAURE.

ABC est un triangle donné, F un point fixe dans le plan du triangle, une droite variable AD passe par le point A et rencontre le côté BC en D, point variable. Construisons une conique ayant pour foyer F, et touchant les trois côtés du triangle ABD. Soit E le point de contact sur AD, construisons une autre conique touchant les trois côtés du triangle ACD, soit E′ le point de contact sur AD, l'angle EFE′ est constant.

Je suppose que la première conique soit une ellipse, la seconde sera une hyperbole en général. Soient G le point où l'ellipse touche le côté BC, G′ le point où l'hyperbole touche le même côté. Je joins le point F aux points A, B, C, D, G, G′, E, E′. Les angles BFG, G′FC sont égaux, puisque chacun d'eux est égal à l'angle AFD, sous lequel la ligne AD, interceptée entre les deux tangentes fixes AB, BC ou AC et BC, est vue du foyer F. Ajoutons à chacun de ces

angles égaux l'angle GFC, j'aurai GFG' = BFC. D'où l'on voit que l'angle GFG' a une valeur constante. Or DF étant bissectrice de l'angle GFE et de l'angle G''FE' (G'' étant un point pris sur le prolongement de FG'), j'ai

$$\text{DFG} = \text{DFE}, \quad \text{DFG}'' = \text{DFE}',$$

d'où

$$\text{DFG}'' - \text{DFG} = \text{DFE}' - \text{DFE} \quad \text{ou} \quad \text{GFG}'' = \text{EFE}':$$

mais GFG'' est égal à $180° - \text{GFG}' = 180° - \text{BFC}$, c'est-à-dire a une valeur constante ; il en est donc de même de EFE', et l'on voit de plus qu'elle est la valeur de cette constante.

La démonstration serait analogue pour toute autre position du point F.

SOLUTION DE LA QUESTION 262 (CATALAN)

(voir t. XI, p. 401);

PAR M. FAURE.

Si l'on considère une suite de valeurs $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1, y_0$ que prend une certaine fonction de x, lorsque la variable reçoit une série de valeurs $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$, on trouve pour la $n^{ième}$ différence de y_n l'expression

$$\Delta^n y_n = y_0 - ny_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} y_2 \ldots \pm y_n.$$

La considération de cette série donne immédiatement la solution de la question 262. Ainsi si l'on pose

$$C_{pn} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n.},$$

on aura

$$(-p)^n = -\frac{n}{1}C_{pn} + \frac{n(n-1)}{1.2}C_{2p,n}\ldots \pm C_{np,n},$$

n étant un nombre entier et positif, p une quantité quelconque.

Soit en effet

$$C_{px,n} = \frac{px(px-1)(px-2)\ldots(px-n+1)}{1.2.3\ldots n.},$$

une fonction de x. Si l'on donne à x les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$, on obtient successivement

$$0, \quad C_{p,n}, \quad C_{2p,n}, \ldots, C_{np,n},$$

donc

$$\Delta^n C_{np,n} = 0 - \frac{n}{1}C_{pn} + \frac{n(n-1)}{1.2}C_{2p,n}\ldots \pm C_{np,n};$$

d'ailleurs la différence $n^{\text{ième}}$ de $C_{np,n}$ est évidemment $(-p)_n$; donc, etc.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE. CONCOURS D'ADMISSION EN 1858

(voir t. XVI, p 112).

Composition mathématique.

x, y, z désignant des coordonnées rectangulaires et m un paramètre variable, on demande de déterminer les diverses surfaces que peut représenter l'équation

$$x^2 + (2m^2+1)(y^2+z^2) - 2(xy+xz+yz) = 2m^2 - 3m + 1,$$

lorsque le paramètre m varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Calcul trigonométrique.

Triangle sphérique :

$$a = 35^\circ\, 28'\, 26'',7,$$
$$b = 90.39.54,3,$$
$$C = 86.18.43,8.$$

Épure de géométrie descriptive.

Un tronc de cône droit à bases parallèles est posé sur le plan horizontal par sa grande base qui est un cercle de 5 centimètres de rayon ; la hauteur du tronc est de 10 centimètres et la petite base a 2 centimètres de rayon. Ce tronc de cône est surmonté d'un cylindre droit ayant même axe que le tronc, un rayon de 5 centimètres et 2 centimètres de hauteur.

Dans un plan, passant par l'axe commun des corps ci-dessus et faisant un angle de 45 degrés avec le plan vertical, on prend un point S distant de cet axe de 12 centimètres et de 20 centimètres du plan horizontal.

Cela posé, on propose de construire les projections de l'intersection du tronc de cône avec un cône oblique, ayant pour sommet le point S et pour base la base inférieure du cylindre qui surmonte le cône tronqué.

On veut aussi connaître : 1° la tangente en un point quelconque ; 2° la tangente en un point situé dans un plan tangent, mené au tronc de cône par le sommet du cône oblique ; 3° la tangente en un des points pour lesquels elle a une direction horizontale.

Nota. L'épure portera une légende explicative.

Lavis à l'encre de Chine.

Faire le lavis, à l'encre de Chine, d'une surface cylin-

drique de 10 centimètres de diamètre sur 15 centimètres de hauteur. Ce cylindre devra se détacher sur un fond formé d'une teinte plate grise; il reposera sur un socle dont la surface plane sera indiquée par une teinte plate d'une très-faible intensité.

Le modèle de cette surface cylindrique pourra être fait à teintes fondues ou adoucies, ou bien à teintes plates superposées.

On admettra que le rayon de lumière a pour projections horizontale et verticale des lignes inclinées à 45 degrés sur la ligne de terre. Le cadre limitant le dessin aura 24 centimètres de hauteur sur 18 centimètres de largeur.

Composition française.

L'amour de la patrie.

QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

1. *Considérez sur une circonférence* (*) m *points* A_0, A_1, A_2, ..., A_{m-1}, *divisant cette courbe en* m *parties quelconques, et supposez qu'à partir de l'un d'eux, de* A_0 *par exemple, on conduise consécutivement des cordes qui unissent ces points de* n *en* n; *de sorte que la première de ces droites soit menée de* A_0 *au point* A_n; *la seconde, de* A_n *au point* A_{2n}, *et ainsi de suite, chacune d'elles sous-tendant* n *des parties en lesquelles la circonférence est divisée : pour que l'on passe ainsi par tous les points de division, il faut et il suffit que les deux*

(*) Et plus généralement sur une courbe fermée.

nombres m *et* n *soient premiers entre eux*. C'est ce qu'on propose de démontrer.

Quels que soient les deux nombres entiers m et n, la construction indiquée ramènera au point de départ A_0. En effet, désignons par m' et n' les quotients obtenus en divisant m et n par leur plus grand commun diviseur, on aura

$$n.m' = m.n',$$

puisque chacun des produits nm', mn' représente le plus petit multiple de m et de n. Or, l'égalité $nm' = mn'$ montre que si l'on conduit consécutivement m' cordes sous-tendant chacune n des divisions de la circonférence, la somme de tous les arcs qu'elles sous-tendent est égale à un nombre entier n' de circonférences ; par conséquent, la dernière aboutira au point d'où on est parti.

Si, généralement, on nomme x le nombre des cordes à mener pour revenir au point de départ, et y le nombre entier de circonférences dont se compose la somme des arcs sous-tendus par ces cordes, on aura $nx = my$, d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}.$$

Les nombres m', n' étant premiers entre eux, x et y seront des équimultiples de ces nombres, donc le *minimum de* x *est* m'.

De là nous concluons qu'en menant à partir du point A_0 un nombre de cordes égal à m', on revient à ce point, sans passer plus d'une fois par l'un quelconque des autres A_1, A_2, etc. Il en résulte que ces cordes unissent entre eux m' points distincts. Il est d'ailleurs évident que lorsqu'on est revenu au point de départ A_0, la construction indiquée ne peut donner aucune corde nouvelle, donc le nombre de points par lesquels on passe en suivant cette construction est précisément m'.

Pour que $m' = m$, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur de m et n soit l'unité, c'est-à-dire que les deux nombres m et n soient premiers entre eux. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Note. La question que nous venons de traiter est au nombre de celles qui ont été jadis plusieurs fois proposées dans les examens d'admission à l'École Polytechnique, afin de bien apprécier la *spontanéité* des candidats (*voir* t. VIII, p. 68).

2. *On a les groupes*

$$\begin{array}{l} 1; \\ 3,\ 5; \\ 7,\ 9,\ 11; \\ 13,\ 15,\ 17,\ 19; \end{array}$$

et ainsi de suite :

Prouver que la somme des nombres contenus dans chacun d'eux est un cube (*).

Le nombre des termes contenus dans les n premiers groupes est $\frac{n(n+1)}{2}$. Et, comme ces termes sont les nombres impairs consécutifs 1, 3, 5, etc., leur somme a pour valeur $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. On a, de même, en additionnant tous les termes des $(n+1)$ premiers groupes, $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Donc *la somme des nombres contenus dans le* $(n+1)^{ième}$ est

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2 - n^2(n+1)^2}{4}$$

(*) Cet énoncé m'a été communiqué par un candidat à l'École Navale; je n'y change rien.

ou

$$\frac{(n+1)^2(4n+4)}{4},$$

expression qui se réduit évidemment à $(n+1)^3$.

G.

SOLUTION DE LA QUESTION 287 (BELLAVITIS)

(voir t. XIII, p. 182);

PAR UN ANONYME.

Si l'on divise d'une manière *quelconque* un polyèdre homogène en tétraèdres et si l'on suppose la masse de chaque tétraèdre réunie au centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, le centre de gravité de ce système de points matériels est toujours le même.

J'appelle $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ les sommets du polyèdre, $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \ldots, (a_n, b_n, c_n)$ les coordonnées de ces points relativement à trois axes rectangulaires issus d'un point arbitraire O. Je divise la surface du polyèdre en triangles et je joins leurs sommets à un point quelconque M de l'espace, j'aurai ainsi une des décompositions exigées par la question. Considérant en particulier la pyramide triangulaire $MA_1A_2A_3$, dont le sommet M a pour coordonnées x, y, z, on a les trois équations

$$(a_1 - x)\alpha + (b_1 - y)\beta + (c_1 - z)\gamma = \frac{1}{2}(OA_1^2 - OM^2),$$

$$(a_2 - x)\alpha + (b_2 - y)\beta + (c_2 - z)\gamma = \frac{1}{2}(OA_2^2 - OM^2),$$

$$(a_3 - x)\alpha + (b_3 - y)\beta + (c_3 - z)\gamma = \frac{1}{2}(OA_3^2 - OM^2),$$

pour exprimer que le point α, β, γ est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre dont il s'agit. Résolvant ces équations, on en tire pour α, par exemple, une valeur

$$\alpha = \frac{N}{D},$$

dans laquelle

$$D = 2.\text{dét.}\begin{Bmatrix} a_1 - x, & b_1 - y, & c_1 - z \\ a_2 - x, & b_2 - y, & c_2 - z \\ a_3 - x, & b_3 - y, & c_3 - z \end{Bmatrix},$$

$$N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} OA_1^2 - OM^2, & b_1 - y, & c_1 - z \\ OA_2^2 - OM^2, & b_2 - y, & c_2 - z \\ OA_3^2 - OM^2, & b_3 - y, & c_3 - z \end{Bmatrix}.$$

Or la quantité D est proportionnelle à la masse du tétraèdre, donc N sera à un facteur constant près le moment du point matériel considéré relativement au plan des yz. Agissant de la même manière pour chaque tétraèdre, nous aurons une somme de moments $\sum N$, qui, divisée par le volume V du polyèdre, donnera l'abscisse du centre de gravité de tous nos points. Il est manifeste que la somme $\sum N$ est constante ; car

$$12V = \sum D = \sum \text{dét.}\begin{Bmatrix} a_1 - x, & b_1 - y, & c_1 - z \\ a_2 - x, & b_2 - y, & c_2 - z \\ a_3 - x, & b_3 - y, & c_3 - z \end{Bmatrix},$$

et cette expression se réduit à

$$12V = \sum \text{dét.}\begin{Bmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{Bmatrix},$$

en plaçant l'origine des coordonnées au point M. Mais en

même temps il faut que la somme $\sum N$ se réduise à

$$\sum N = \sum \text{dét.} \begin{Bmatrix} OA_1^2, & b_1, & c_1 \\ OA_2^2, & b_2, & c_2 \\ OA_3^2, & b_3, & c_3 \end{Bmatrix},$$

c'est-à-dire à une quantité constante.

THÉORÈME GÉOMÉTRIQUE DE FERMAT.

Soit ABCD *un rectangle, où* $AB = BC\sqrt{2}$; E *est un point quelconque de la demi-circonférence décrite sur* AB *comme diamètre;* F *et* G *points respectivement d'intersection des droites* ED, EC *avec le diamètre* AB; *on a la relation* $\overline{AG}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{AB}^2$ (*).

UNE PROPRIÉTÉ DES NORMALES DE L'ELLIPSE;

D'APRÈS M. OTTO BÖKLEN, DE SULZ (WURTEMBERG).

Soit O le centre d'une ellipse; $OA = a =$ demi grand axe; $OB = b =$ demi petit axe; par un point quelconque M de l'ellipse, on mène une normale rencontrant le grand axe en P et le petit axe en Q; par ce point Q, on mène une droite QL telle, que l'on ait

$$\frac{\text{tang OQL}}{\text{tang OQP}} = \frac{a}{b};$$

(*) On n'insérera pas de démonstration.

L étant situé sur le grand axe, on a

$$QL = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

Cette propriété sert à résoudre ces trois problèmes : 1° inscrire dans un angle *droit* une droite de longueur donnée et passant par un point fixe ; 2° mener une normale à l'ellipse ; 3° trisecter un angle. Inutile d'avertir des *géomètres* qu'il ne peut s'agir de constructions *géométriques*.

La connexion entre le problème III et le problème I s'établit ainsi : soit le secteur circulaire GHE, H le centre et GE l'arc qu'il faut trisecter ; prolongeons le rayon EH jusqu'à ce qu'il rencontre de nouveau la circonférence en K ; menons le diamètre MHN, qui bissecte l'angle GHK ; menons par K une corde KO qui coupe le diamètre bissecteur MN en un point α tel, que l'on ait

$$O\alpha = OH;$$

alors

$$\text{arc GO} = \frac{1}{3}\,\text{arc GE}.$$

Or l'angle MON est droit ; les angles NOK, MOK sont connus, ainsi que la droite $O\alpha$ égale au rayon HE, et $MN = 2O\alpha$; cela revient donc à mener par un point donné dans un angle droit une droite égale au double de la distance du point au sommet de l'angle droit, ce qui s'obtient par le problème I.

Le problème I se résout géométriquement lorsque le point est situé sur une bissectrice de l'angle droit, et dans ce cas les deux autres problèmes sont aussi susceptibles d'une solution géométrique, c'est-à-dire on peut géométriquement trouver le tiers d'un angle droit, et mener

une normale à l'ellipse par un point situé sur les diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

QUESTIONS.

---

446. Joignons par une droite les centres des cercles inscrit et circonscrit à un triangle; cette droite rencontre le cercle inscrit en deux points; soient s et s' les *puissances* de ces points relativement au cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, R le rayon du cercle circonscrit, on a la relation

$$ss' = r^3(4R + r).$$

Note. La *puissance* d'un point par rapport à un cercle est le produit des segments de la sécante ou de la corde menée par ce point; expression introduite par Steiner, le célèbre géomètre, Euclide moderne de l'Allemagne (*).

447. Soient

$$x_1 = p^{\frac{1}{2}},$$

$$x_2 = \left(p + \sqrt{p_2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_3 = \left(p + \sqrt{p_2 + qx_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

. . . .

$$x_n = \left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

(*) La Prusse possède de grands géomètres qu'elle rémunère petitement. Jacobi voulait échanger Berlin contre Vienne; Dirichlet a fait cet échange contre Göttingue, et Steiner contre la Suisse, son pays natal.

p et q sont supérieurs à zéro; démontrer que :

1°. Les termes x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$ vont en croissant;

2°. $x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p$ est une quantité positive;

3°. $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-2}$ n'est pas inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}(2p)^{\frac{n-2}{2}}$;

4°. $x^n - x^{n-1} < \frac{1}{2^{3n-2\frac{1}{4}}}\left(\frac{p^2+q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q^2}{8p^3}\right)^{\frac{n-2}{4}}$.

(GRUNERT.)

448. Soient A et B les extrémités du grand axe $2a$ d'une ellipse, C le centre; O un point fixe dans le plan de l'ellipse, et OC $= d$; inscrivons dans l'ellipse un polygone de $2n$ côtés, projection d'un polygone régulier inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection orthogonale; A et B étant deux sommets opposés, menons du point O des rayons successifs r_1, r_2, $r_3, \ldots r_{2n}$, et par le centre des demi-diamètres R_1, $R_2, \ldots, R_{2n}$ respectivement parallèles à ces rayons, on a les deux relations

$$\frac{r_1}{R_1}\cdot\frac{r_3}{R_3}\cdot\frac{r_5}{R_5}\cdot\frac{r_{2n-1}}{R_{2n-1}} = \pm\left(1+\frac{d}{a}\right)^n,$$

$$\frac{r_2}{R_2}\cdot\frac{r_4}{R_4}\cdot\frac{r_6}{R_6}\cdot\frac{r_{2n}}{R_{2n}} = \pm\left(1-\frac{d}{a}\right)^n,$$

le signe supérieur lorsque le point O est dans l'intérieur, et le signe inférieur lorsque le point est extérieur.

449. Soit l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 la somme des puissances 0, 1, 2, 3, 4 des racines α, β, γ, δ,

Si l'on a l'une ou l'autre de ces deux relations

$$ae^2 - 4bd + 3c^2 = 0,$$

et

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} = 0;$$

alors

$$\sum \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} = 0.$$

(MICHAEL STREBOR.)

450. Une droite est donnée par ses deux projections qui se rencontrent en un même point de la ligne de terre; mener par la droite un plan tel, que ses deux traces, étant relevées, forment un angle bissecté par la droite donnée. (Solution graphique.)

451. Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales. (MANNHEIM.)

NOTES SUR DIVERS SUJETS.

Plusieurs questions m'ont été adressées par des abonnés aux *Nouvelles Annales*. Les unes appartiennent entièrement aux mathématiques élémentaires ; les autres se rapportent à des considérations d'un ordre différent, elles sont relatives aux modifications apportées par le Programme *officiel* dans l'enseignement scientifique des lycées. Je réponds d'abord aux premières :

1. *Déterminer les angles d'un triangle dont les côtés sont des multiples du rayon du cercle inscrit, et faire voir que si l'on prend pour unité le rayon de ce cercle, la surface du triangle est exprimée par un nombre en-*

tier dont le cube est égal à la somme des cubes des trois nombres qui représentent les côtés du triangle.

Soient r le rayon du cercle inscrit; a, b, c, les côtés; p, le demi-périmètre; s, la surface; x, y, z, les rapports des côtés a, b, c au rayon r: on aura

$$a = rx, \quad b = ry, \quad c = rz, \quad p = \frac{1}{2} r(x + y + z);$$

d'où

$$p - a = \frac{1}{2} r(y + z - x),$$

$$p - b = \frac{1}{2} r(x + z - y),$$

$$p - c = \frac{1}{2} r(x + y - z).$$

Mais, d'après une formule connue,

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p};$$

donc

$$r^2 = \frac{r^2}{4} \cdot \frac{(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)}{(x+y+z)}:$$

équation qui revient à

$$(1) \quad (y+z-x)(x+z-y)(x+y-z) = 4(x+y+z).$$

Les côtés a, b, c étant, par hypothèse, des multiples du rayon r, les rapports x, y, z, de ces côtés au rayon, sont nécessairement des nombres entiers, et, par conséquent, les expressions

$$(y+z-x), \quad (x+z-y), \quad (x+y-z), \quad (x+y+z)$$

représentent aussi des nombres entiers, qui doivent être positifs, parce que les valeurs des différences $p - a$, $p - b$, $p - c$ sont, comme on sait, des quantités positives.

De plus, il est facile de reconnaître que chacun des quatre nombres

$$(y+z-x),\quad (x+z-y),\quad (x+y-z),\quad (x+y+z),$$

est exactement divisible par 2.

En effet, l'égalité (1) montre que le produit des trois premiers est un multiple de 4; d'ailleurs en additionnant deux à deux ces trois nombres, on obtient pour sommes $2z$, $2x$, $2y$; il faut donc que chacun d'eux soit pair. Il en est de même du quatrième $(x+y+z)$, car il est égal à la somme des trois premiers.

Cela établi, posons

$$(2)\qquad y+z-x=2X,$$
$$(3)\qquad z+x-y=2Y,$$
$$(4)\qquad x+y-z=2Z;$$

il en résulte

$$x+y+z=2(X+Y+Z),$$

et par suite l'équation (1) se réduit à

$$(5)\qquad XYZ=X+Y+Z.$$

On voit ainsi que la détermination des rapports x, y, z dépend de la résolution de ce problème :

Trouver trois nombres entiers et positifs, X, Y, Z, *dont la somme égale le produit.*

Il est clair que les nombres cherchés X, Y, Z ne peuvent être égaux entre eux, car leur égalité donnerait

$$X^3=3X,\quad \text{ou}\quad X=\sqrt{3}.$$

Soit X le plus grand de ces trois nombres, on aura

$$X+Y+Z<3.X;$$

puis, en ayant égard à l'équation (5),

$$XYZ<3.X,\quad YZ<3.$$

De cette dernière inégalité il faut conclure YZ = 2, ou YZ = 1, puisque Y et Z sont des nombres entiers et positifs.

Mais l'équation YZ = 1 n'admet pour solution, entière et positive, que Y = 1, Z = 1. Et cette solution ne peut convenir, parce qu'elle conduit à X = X + 2. Donc YZ = 2, ce qui exige que l'un des deux nombres Y, Z, par exemple Y, soit égal à 2, et l'autre Z, égal à l'unité. La valeur correspondante de X, déterminée par l'équation (5), est évidemment le nombre 3.

En remplaçant X, Y, Z par 3, 2, 1, les équations (2), (3), (4) deviennent

$$y + z - x = 6,$$
$$z + x - y = 4,$$
$$x + y - z = 2,$$

et en additionnant deux à deux ces dernières, on trouve

$$z = 5, \quad y = 4, \quad x = 3;$$

d'où

$$a = 3r, \quad b = 4r, \quad c = 5r.$$

Ces valeurs de a, b, c, donnant $c^2 = b^2 + a^2$, l'angle C, opposé au côté c, est droit. On a

$$\sin B = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}, \quad \sin A = \frac{a}{c} = \frac{3}{5};$$

les trois angles du triangle sont ainsi déterminés.

En prenant pour unité le rayon r du cercle inscrit, les valeurs numériques des trois côtés a, b, c seront 3, 4, 5. La surface du triangle, qui a pour mesure la moitié du produit des côtés de l'angle droit, sera exprimée par le nombre 6. Or

$$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3;$$

donc

$$s^3 = a^3 + b^3 + c^3.$$

C'est ce qu'il fallait faire voir.

2. *Diviser un angle donné α positif et moindre que* 180 *degrés en* n *parties telles, que le produit de leurs sinus soit un maximum.*

Ce maximum correspond à l'égalité des parties. Car, en supposant d'abord $n = 2$, nommons a, b les deux parties ; on aura

$$\sin a . \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos\alpha].$$

Le maximum de $\cos(a-b) - \cos\alpha$, est évidemment $1 - \cos\alpha$. L'égalité $\cos(a-b) = 1$ donne $a = b$, parce que a et b sont positifs et moindres que 180 degrés.

Du cas particulier $n = 2$, on passe au cas général au moyen d'un raisonnement qui est bien connu.

3. *Quel est le minimum du rapport* $\frac{R}{r}$ *des rayons de deux cercles, l'un circonscrit à un triangle, et l'autre inscrit?*

Soient A, B, C et s les trois angles et la surface du triangle ; on sait que

$$R^2 = \frac{s}{2 . \sin A . \sin B . \sin C}$$

et

$$r^2 = s . \tang \frac{1}{2} A . \tang \frac{1}{2} B . \tang \frac{1}{2} C,$$

d'où

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{1}{16 . \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) . \sin^2\left(\frac{B}{2}\right) . \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)};$$

il en résulte

$$(1) \qquad \frac{R}{r} = \frac{1}{4.\sin\left(\frac{A}{2}\right).\sin\left(\frac{B}{2}\right).\sin\left(\frac{C}{2}\right)}.$$

Or, le maximum du produit des sinus des trois angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, dont la somme est 90 degrés, s'obtient, comme on vient de le voir (2), en posant

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} = 30°,$$

ce qui donne

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right).\sin\left(\frac{B}{2}\right).\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8};$$

l'égalité (1) devient alors

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2,$$

par conséquent, le nombre 2 est le *minimum* cherché.

4. *Déterminer le maximum du produit des tangentes de* n *angles positifs* a, b, c, d, *etc., dont la somme,* α, *est donnée : on suppose que la somme de deux quelconques de ces angles est moindre que* 90 *degrés.*

Les inégalités supposées

$$a + b < 90°, \quad c + d < 90°, \quad \ldots,$$

donnent

$$\text{tang}\, a.\text{tang}\, b < 1, \quad \text{tang}\, c.\text{tang}\, d < 1 \ldots;$$

et de là on peut conclure que le produit p des tangentes des angles a, b, c, d, etc., est toujours moindre que l'unité. En effet, lorsque n est pair, p se forme du produit

des $\frac{n}{2}$ nombres

$$\tang a.\tang b, \quad \tang c.\tang d, \ldots,$$

qui sont chacun compris entre o et 1. On a donc $p < 1$.

Si n est impair, p est le produit de $\tang a$ par un nombre $\tang b.\tang c.\tang d$, etc., plus petit que l'unité, il s'ensuit

$$p < \tang a.$$

On aura de même

$$p < \tang b,$$

d'où

$$p^2 < \tang a.\tang b < 1 \quad \text{et} \quad p < 1.$$

Ainsi le produit variable p a un maximum compris entre o et 1.

Cela posé, considérons d'abord le cas particulier où $n = 2$.

Dans ce cas, on a :

$$a + b = \alpha, \quad \alpha < 90°, \quad p = \tang a.\tang b = \frac{\sin a.\sin b}{\cos a.\cos b}.$$

Mais

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos\alpha],$$

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos\alpha];$$

donc,

$$p = \frac{\cos(a-b) - \cos\alpha}{\cos(a-b) + \cos\alpha} = 1 - \frac{2\cos\alpha}{\cos(a-b) + \cos\alpha}.$$

La fraction $\frac{2\cos\alpha}{\cos(a-b) + \cos\alpha}$ est positive, puisque l'angle α est aigu; par conséquent le maximum de p s'obtiendra en posant

$$\cos(a-b) = 1,$$

ce qui donne

$$a=b=\frac{\alpha}{2}$$

et

$$p=\text{tang}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Quel que soit n, il faut, pour que le produit p devienne maximum, que les angles a, b, c, etc., soient égaux entre eux; on sait comment cette proposition générale se déduit du cas particulier que nous venons de considérer.

Quant à la valeur de p, correspondante à l'égalité des angles a, b, c, etc., elle est évidemment $\text{tang}^n\left(\frac{\alpha}{n}\right)$. Cette valeur est moindre que l'unité, parce que $\frac{\alpha}{n}$ est moindre que la moitié d'un angle droit.

5. *Démontrer analytiquement que de tous les triangles circonscrits à un cercle donné, le plus petit en surface a ses trois angles égaux entre eux.*

Soient r le rayon du cercle, A, B, C et s les trois angles et la surface de l'un des triangles circonscrits, on aura

$$s=\frac{r^2}{\text{tang}\frac{A}{2}\cdot\text{tang}\frac{B}{2}\cdot\text{tang}\frac{C}{2}}.$$

Le minimun de s correspond au maximum du produit des tangentes des angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ dont la somme est égale à 90 degrés; donc (n° 4) lorsque s est minimum, les angles A, B, C sont égaux entre eux. C'est ce qu'il fallait démontrer. G.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE NEWTON SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT DANS UNE CONIQUE.

1. Théorème. *Soient deux systèmes chacun de* n *plans; ces deux systèmes se coupent en* n^2 *droites par lesquelles passent une infinité de surfaces de degré* n; *chacune de ces surfaces jouit de cette propriété : le produit des distances d'un point quelconque de cette surface à l'un des systèmes de plans est au produit des distances du même point à l'autre système de plans dans un rapport constant.*

Démonstration. Soient

$$A_p = a$$

l'équation d'un plan quelconque du premier système, et

$$B_p = 0$$

l'équation d'un plan quelconque du second système; la surface représentée par l'équation

$$(1) \qquad A_1 A_2 A_3 \ldots A_n + \lambda B_1 B_2 \ldots B_n = 0,$$

où λ étant une constante arbitraire, est une surface de degré n et passant par les n^2 droites d'intersection du système A avec le système B. Soit α_p la distance perpendiculaire d'un point de cette surface au plan A_p et β_p au plan B_p; d'après l'expression connue de ces distances, on a

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n + \lambda \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n = 0.$$

Observation. L'équation (1) renferme $8n$ constantes,

λ comprise ; une surface de degré n renferme $\frac{n^3+6n^2+11n}{6}$ constantes. On peut donc identifier cette équation avec l'équation (1) tant que n est inférieur à 5, identification purement *analytique* pour $n=2$ et $n=4$ lorsque ces surfaces ne renferment pas de droites ; mais les surfaces du deuxième et du quatrième degré qui contiennent des droites peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$A_1 A_2 + \lambda B_1 B_2 = 0, \quad A_1 A_2 A_3 A_4 + \lambda B_1 B_2 B_3 B_4 = 0,$$

et une surface *quelconque* du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$A_1 A_2 A_3 + \lambda B_1 B_2 B_3 = 0 ;$$

ces surfaces possèdent donc la propriété *des distances*, ci-dessus énoncée, et l'on peut en déduire les principales propriétés.

2. Théorème. *Soient donnés dans un plan deux systèmes, chacun de* n *droites ; ces deux systèmes se coupent en* n^2 *points par lesquels passent une infinité de lignes de degré* n ; *chacune de ces lignes jouit de cette propriété : le produit des distances d'un point quelconque de cette ligne à l'un des systèmes de droites est au produit des distances du même point à l'autre système dans un rapport constant.*

Même démonstration.

Observation. L'équation (1) où les A et les B représentent des droites contient $6n$ constantes. Une ligne de degré n renferme $\frac{n^2+3n}{2}$ constantes. Aussi on peut opérer *analytiquement* l'identification pour n inférieur à 10.

Faisant $n=2$, on a la propriété des *distances* pour le

quadrilatère inscrit dans le quadrilatère; théorème fondamental de Newton dont la constance du *rapport anharmonique* de M. Chasles n'est qu'une simple transformation (t. XVI, p. 220); mais l'énoncé de Newton présente l'avantage de pouvoir être généralisé.

3. Par des transformations métriques du théorème de Newton, M. le capitaine Faure parvient à celui-ci :

Un quadrilatère étant circonscrit à une conique, le produit des distances des deux sommets opposés à une cinquième tangente quelconque, divisé par le produit des distances des deux autres sommets à la même tangente, donne un quotient constant.

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE (*);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

INTRODUCTION.

1. Les coordonnées d'un point de l'espace seront représentées par $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$. Cette notation, qui offre de nombreux avantages, donne à l'équation des surfaces du second ordre la forme suivante d'une fonction quadra-

(*) Ce Mémoire répond à toute question *finitésimale* sur une surface du second ordre, pour une équation décanôme et axes quelconques.
TM.

tique homogène :

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 \\ \quad + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 \\ \quad + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 \end{array} \right\} = 0\ (^*);$$

équation qu'on peut écrire symboliquement

$$\varphi = \sum a_{p,q}\, x_p\, x_q = 0,$$

en donnant à p et q simultanément les valeurs 1, 2, 3, 4, et en posant

$$a_{p,q} = a_{q,p}.$$

Il résulte de cette égalité que les rectangles des variables auront 2 pour coefficient.

2. Le principe suivant sera d'une application fréquente :

Soient X_1, X_2, X_3, *trois fonctions linéaires des coordonnées* $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ *d'un certain point* M, *par rapport aux axes* Ox_1, Ox_2, Ox_3 ; *si l'on prend pour nouveaux axes* O_1y_1, O_1y_2, O_1y_3, *les intersections des trois plans* $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, *qu'on suppose se couper en un seul point, les fonctions* X_1, X_2, X_3 *seront proportionnelles respectivement aux nouvelles coordonnées* y_1, y_2, y_3 *du même point* M.

La démonstration de ce théorème se déduit immédiatement des formules de transformation des coordonnées.

3. Je rappellerai encore quelques notions relatives aux déterminants.

(*) J'ai supprimé la virgule qu'on place ordinairement entre les deux indices de chaque lettre ; il n'en résultera, dans le cas actuel, aucune obscurité, et la lecture deviendra plus facile.

Si P représente un déterminant dont les éléments sont $a_{r,s}$, la notation $\frac{dP}{da_{r,s}}$ désignera un déterminant déduit du déterminant P, en supprimant la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne; mais, en outre, $\frac{dP}{da_{r,s}}$ sera la dérivée, par rapport à $a_{r,s}$, du déterminant P, pourvu qu'on affecte le *déterminant déduit* et *non développé* du signe *plus* ou du signe *moins*, suivant que les nombres r et s sont de *même parité* ou de *parité différente*.

De même $\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$ désignera un déterminant, déduit du déterminant P, en supprimant d'abord la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne, puis la $r_1{}^{ième}$ ligne et la $s_1{}^{ième}$ colonne; mais, en outre, $\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$ sera la dérivée de $\frac{dP}{da_{r,s}}$, par rapport à a_{r_1,s_1}. On connaît le signe de ce premier déterminant non développé d'après la règle précédente; on affectera le second *déterminant déduit* et *non développé* du signe *plus* ou du signe *moins*, d'après la règle suivante:

1°. Si $\left\{\begin{matrix} r_1 > r \\ s_1 > s \end{matrix}\right\}$, on donnera le signe + ou le signe —, suivant que $(r_1 - 1)$ et $(s_1 - 1)$ seront de *même parité* ou de *parité différente;*

2°. Si $\left\{\begin{matrix} r_1 > r \\ s_1 < s \end{matrix}\right\}$, on donnera le signe + ou le signe —, suivant que $(r_1 - 1)$ et s_1 seront de *même parité* ou de *parité différente;*

3°. Si $\left\{\begin{matrix} r_1 < r \\ s_1 > s \end{matrix}\right\}$, on donnera le signe + ou le signe —, suivant que r_1 et $(s_1 - 1)$ seront de *même parité* ou de *parité différente;*

4°. Si $\left\{\begin{matrix} r_1 < r \\ s_1 < s \end{matrix}\right\}$, on donnera le signe + ou le signe —,

suivant que r_1 et s_1 seront de *même parité* ou de *parité différente*.

On combinera les deux signes ainsi obtenus, d'après la règle usitée des signes, et on aura définitivement le signe dont il faudra affecter le *déterminant déduit, non développé*, pour que $\frac{d^2 P}{da_{r,s}\, da_{r_1,s_1}}$ soit la dérivée seconde du déterminant P.

Cette règle se légitimera facilement par les considérations suivantes : $\frac{dP}{da_{r,s}}$ représente un déterminant obtenu en supprimant la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne, affecté du signe + ou —, suivant la *parité* ou la *disparité* du couple (r, s). Pour obtenir $\frac{d^2 P}{da_{r,s}\, da_{r_1,s_1}}$, il faudra, dans ce dernier déterminant, supprimer la ${r_1}^{ième}$ ligne et la ${s_1}^{ième}$ colonne; mais pour connaître le *signe* de ce résultat, il sera nécessaire de ramener le déterminant susdit au *type normal*, c'est-à-dire *diminuer de un* tous les *premiers indices* dans les lignes qui suivent la $r^{ième}$ ligne, ainsi que tous les *seconds indices* dans les colonnes qui suivent la $s^{ième}$ colonne. Ce qui conduit immédiatement à la règle que je viens d'énoncer.

Le *type normal* est celui où les indices se suivent dans leur ordre naturel et sans discontinuité.

Il ne faut pas oublier que les signes des différents termes d'un déterminant dépendent du signe du produit des termes de la diagonale qui part du sommet supérieur à gauche du carré, et auquel, suivant l'usage, j'affecterai toujours le signe *plus*.

J'ai insisté sur toutes ces conventions, parce que le signe de ces quantités joue, dans les questions que je vais traiter, un rôle très-important; et il est nécessaire d'éviter toute espèce de confusion.

CHAPITRE PREMIER.

DISCUSSION DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

§ I.

Relations d'identité.

4. Avant d'aborder la discussion, j'écrirai les développements de plusieurs expressions et certaines relations d'identité, qui se présenteront fréquemment dans les calculs suivants ; j'ai pensé qu'il était utile de réunir toutes ces formules dans un même paragraphe. La plupart de ces relations sont une conséquence immédiate de la formule bien connue

$$P\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}} = \frac{dP}{da_{r,s}}\,\frac{dP}{da_{r_1,s_1}} - \frac{dP}{da_{r,s_1}}\,\frac{dP}{da_{r_1,s}}\ (*).$$

Depuis longtemps M. Terquem était arrivé à ces résultats par une voie différente ; et c'est à un travail sur ce sujet, qu'il a eu l'obligeance de me communiquer, que j'ai emprunté les principales formules relatées dans ce paragraphe.

Je désignerai par Δ le *discriminant* de la fonction φ ; de sorte que

$$(1)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

ce déterminant, dans lequel

$$a_{r,s} = a_{s,r}$$

est en même temps le déterminant *Hessien* de la fonction φ (**).

(*) Brioschi, *Théorie des déterminants*, p. 13.

(**) Déterminant introduit par Otto Hesse $a_{s,r} = 2\dfrac{d^2\varphi}{dx_r\,dx_s}$.

On trouve, en développant,

$$\Delta = \begin{cases} a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44} + a^2_{12}\,a^2_{34} + a^2_{23}\,a^2_{41} + a^2_{13}\,a^2_{24} \\ - a_{11}a_{22}a^2_{34} - a_{11}\,a_{33}\,a^2_{24} - a_{11}\,a_{44}\,a^2_{23} \\ - a_{22}\,a_{33}\,a^2_{14} - a_{22}a_{44}a^2_{13} - a_{33}a_{44}\,a^2_{12} \\ - 2\begin{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{12}a_{13}a_{34}a_{42} \\ + a_{13}\,a_{32}\,a_{24}\,a_{41} \end{pmatrix} \\ + 2\begin{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{22}a_{13}a_{34}a_{41} + a_{33}a_{12}a_{24}a_{41} \\ + a_{44}\,a_{12}\,a_{23}\,a_{31} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

5. Il est important de remarquer que de l'égalité

$$a_{r,s} = a_{s,r},$$

il résulte

$$\frac{d\Delta}{da_{r,s}} = \frac{d\Delta}{da_{s,r}}.$$

Par suite, l'expression $\frac{d\Delta}{da_{r,s}}$ ne représente plus la dérivée effective de Δ.

Cependant, afin de conserver aux formules que je vais écrire un rapport plus intime avec les formules générales qui appartiennent à la théorie des déterminants, les $\frac{d\Delta}{da_{r,s}}$ nous représenteront toujours le déterminant déduit, en supprimant la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne et affecté du signe convenable. Il en sera de même pour les $\frac{d^2\Delta}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$.

D'ailleurs, lorsqu'on voudra passer aux dérivées effectives du premier ordre, il suffira de se rappeler la relation évidente

$$\frac{\mathrm{d}.\Delta}{\mathrm{d}a_{r,s}} = 2\,\frac{d\Delta}{da_{r,s}};$$

la caractéristique d désignant une dérivée effective.

6. Je donnerai, en premier lieu, les dérivées premières de Δ et plusieurs des dérivées secondes.

Dérivées premières.

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Delta}{da_{11}} = \delta_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{22}\, a_{33}\, a_{44} - a_{22}\, a_{34}^2 - a_{33}\, a_{42}^2 - a_{44}\, a_{23}^2 + 2 a_{34}\, a_{42}\, a_{23}, \\[2ex] \dfrac{d\Delta}{da_{22}} = \delta_{22} = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{33}\, a_{44} - a_{11}\, a_{34}^2 - a_{33}\, a_{41}^2 - a_{44}\, a_{13}^2 + 2 a_{34}\, a_{41}\, a_{13}, \\[2ex] \dfrac{d\Delta}{da_{33}} = \delta_{33} = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{44} - a_{11}\, a_{24}^2 - a_{22}\, a_{41}^2 - a_{44}\, a_{12}^2 + 2 a_{24}\, a_{41}\, a_{12}; \\[2ex] \dfrac{d\Delta}{da_{44}} = \delta_{44} = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}^2 - a_{22}\, a_{31}^2 - a_{33}\, a_{12}^2 + 2 a_{23}\, a_{31}\, a_{12}. \end{cases}$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\Delta}{da_{12}} = \frac{d\Delta}{da_{21}} = \delta_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} -a_{21}\,a_{33}\,a_{44} + a_{21}\,a^2_{34} \quad -a_{23}\,a_{34}\,a_{41} \\ +a_{23}\,a_{31}\,a_{44} - a_{24}\,a_{31}\,a_{43} + a_{24}\,a_{33}\,a_{41}\,; \end{array} \right. \\
&\frac{d\Delta}{da_{13}} = \frac{d\Delta}{da_{31}} = \delta_{13} = +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} -a_{31}\,a_{22}\,a_{44} + a_{31}\,a^2_{24} \quad -a_{32}\,a_{24}\,a_{41} \\ +a_{32}\,a_{21}\,a_{44} - a_{34}\,a_{21}\,a_{42} + a_{34}\,a_{22}\,a_{41}\,; \end{array} \right. \\
&\frac{d\Delta}{da_{14}} = \frac{d\Delta}{da_{41}} = \delta_{14} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} -a_{41}\,a_{22}\,a_{33} + a_{41}\,a^2_{23} \quad -a_{42}\,a_{23}\,a_{31} \\ +a_{42}\,a_{21}\,a_{33} - a_{43}\,a_{21}\,a_{32} + a_{43}\,a_{22}\,a_{31}\,; \end{array} \right. \\
&\frac{d\Delta}{da_{23}} = \frac{d\Delta}{da_{32}} = \delta_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} -a_{32}\,a_{11}\,a_{44} + a_{32}\,a^2_{14} \quad -a_{31}\,a_{14}\,a_{42} \\ +a_{31}\,a_{12}\,a_{44} - a_{34}\,a_{12}\,a_{41} + a_{34}\,a_{11}\,a_{42}\,; \end{array} \right. \\
&\frac{d\Delta}{da_{24}} = \frac{d\Delta}{da_{42}} = \delta_{24} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} -a_{42}\,a_{11}\,a_{33} + a_{42}\,a^2_{13} \quad -a_{41}\,a_{13}\,a_{32} \\ +a_{41}\,a_{12}\,a_{33} - a_{43}\,a_{12}\,a_{31} + a_{43}\,a_{11}\,a_{32}\,; \end{array} \right. \\
&\frac{d\Delta}{da_{34}} = \frac{d\Delta}{da_{43}} = \delta_{34} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} -a_{43}\,a_{11}\,a_{22} + a_{43}\,a^2_{12} \quad -a_{41}\,a_{12}\,a_{23} \\ +a_{41}\,a_{13}\,a_{22} - a_{42}\,a_{13}\,a_{21} + a_{42}\,a_{11}\,a_{23}\,. \end{array} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \delta_{r,s} = \delta_{s,r}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dérivées secondes.

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{22}} &= p_{12} = +\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{33}a_{44} - a_{34}^2,\\
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{33}} &= p_{13} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{22}a_{44} - a_{24}^2,\\
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{44}} &= p_{14} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2,\\
\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} &= p_{23} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{44} - a_{14}^2,\\
\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} &= p_{24} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}^2,\\
\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} &= p_{34} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.\\
& p_{r,s} = p_{s,r}.
\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{34}} &= r_{12} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = -a_{11}a_{43} + a_{13}a_{41},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{24}} &= r_{13} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} = -a_{11}a_{42} + a_{12}a_{41},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{44}\,da_{23}} &= r_{14} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{14}} &= r_{23} = +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} = -a_{22}a_{41} + a_{21}a_{42},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{44}\,da_{13}} &= r_{24} = +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{22}a_{31} + a_{21}a_{32},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{44}\,da_{12}} &= r_{34} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{33}a_{21} + a_{31}a_{23}.
\end{aligned}\right.$$

$$
4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{34}} &= r_{21} = -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -a_{22}a_{43} + a_{23}a_{42},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{24}} &= r_{31} = +\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -a_{33}a_{42} + a_{32}a_{43},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{23}} &= r_{41} = -\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{41}a_{32} + a_{42}a_{34},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{14}} &= r_{32} = +\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = -a_{33}a_{41} + a_{31}a_{43},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{13}} &= r_{42} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{44}a_{31} + a_{41}a_{34},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{12}} &= r_{43} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{44}a_{21} + a_{41}a_{24}.
\end{aligned}\right.
$$

7. Passons maintenant aux relations d'identité :

$$
5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta p_{34} &= \delta_{33}\,\delta_{44} - \delta^2_{34},\\
\Delta p_{24} &= \delta_{22}\,\delta_{44} - \delta^2_{24},\\
\Delta p_{14} &= \delta_{11}\,\delta_{44} - \delta^2_{14},\\
\Delta p_{23} &= \delta_{22}\,\delta_{22} - \delta^2_{23},\\
\Delta p_{13} &= \delta_{11}\,\delta_{33} - \delta^2_{13},\\
\Delta p_{12} &= \delta_{11}\,\delta_{.2} - \delta^2_{12}.
\end{aligned}\right.
$$

$$
6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta r_{34} &= \delta_{44}\,\delta_{12} - \delta_{24}\,\delta_{14},\\
\Delta r_{24} &= \delta_{44}\,\delta_{13} - \delta_{34}\,\delta_{14},\\
\Delta r_{14} &= \delta_{44}\,\delta_{23} - \delta_{34}\,\delta_{24}.\\
\Delta r_{43} &= \delta_{33}\,\delta_{12} - \delta_{23}\,\delta_{13},\\
\Delta r_{23} &= \delta_{33}\,\delta_{14} - \delta_{34}\,\delta_{13},\\
\Delta r_{13} &= \delta_{33}\,\delta_{24} - \delta_{34}\,\delta_{23}.\\
\Delta r_{42} &= \delta_{22}\,\delta_{13} - \delta_{23}\,\delta_{12},\\
\Delta r_{32} &= \delta_{22}\,\delta_{14} - \delta_{24}\,\delta_{12},\\
\Delta r_{12} &= \delta_{22}\,\delta_{34} - \delta_{24}\,\delta_{32}.\\
\Delta r_{41} &= \delta_{11}\,\delta_{23} - \delta_{13}\,\delta_{12},\\
\Delta r_{31} &= \delta_{11}\,\delta_{24} - \delta_{14}\,\delta_{12},\\
\Delta r_{21} &= \delta_{11}\,\delta_{34} - \delta_{14}\,\delta_{13}.
\end{aligned}\right.
$$

$$(7)\quad \begin{cases} \delta_{44}\, a_{11} = p_{24}\, p_{34} - r^2_{14}, & \delta_{44}\, a_{22} = p_{14}\, p_{34} - r^2_{24}, \\ \delta_{33}\, a_{11} = p_{23}\, p_{34} - r^2_{13}, & \delta_{33}\, a_{22} = p_{13}\, p_{34} - r^2_{23}, \\ \delta_{22}\, a_{11} = p_{23}\, p_{24} - r^2_{12}, & \delta_{11}\, a_{22} = p_{13}\, p_{14} - r^2_{21}, \\ \delta_{44}\, a_{33} = p_{14}\, p_{24} - r^2_{34}, & \delta_{33}\, a_{44} = p_{13}\, p_{23} - r^2_{43}, \\ \delta_{22}\, a_{33} = p_{12}\, p_{24} - r^2_{32}, & \delta_{22}\, a_{44} = p_{12}\, p_{23} - r^2_{42}, \\ \delta_{11}\, a_{33} = p_{12}\, p_{14} - r^2_{31}. & \delta_{11}\, a_{44} = p_{12}\, p_{13} - r^2_{41}. \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \delta_{44}\, a_{12} = r_{14}\, r_{24} - r_{34}\, p_{34}, & \delta_{33}\, a_{12} = r_{13}\, r_{23} - r_{43}\, p_{34}, \\ \delta_{44}\, a_{13} = r_{14}\, r_{34} - r_{24}\, p_{24}, & \delta_{33}\, a_{14} = r_{13}\, r_{43} - r_{23}\, p_{23}, \\ \delta_{44}\, a_{23} = r_{34}\, r_{24} - r_{14}\, p_{14}, & \delta_{33}\, a_{24} = r_{43}\, r_{23} - r_{13}\, p_{13}, \\ \delta_{22}\, a_{13} = r_{12}\, r_{32} - r_{42}\, p_{24}, & \delta_{11}\, a_{23} = r_{21}\, r_{31} - r_{41}\, p_{14}, \\ \delta_{22}\, a_{14} = r_{12}\, r_{42} - r_{32}\, p_{23}, & \delta_{11}\, a_{24} = r_{21}\, r_{41} - r_{31}\, p_{13}, \\ \delta_{22}\, a_{34} = r_{42}\, r_{32} - r_{12}\, p_{12}. & \delta_{11}\, a_{34} = r_{31}\, r_{41} - r_{21}\, p_{12}. \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \delta_{34}\, a_{11} = r_{14}\, r_{13} + r_{12}\, p_{34}, & \delta_{34}\, a_{22} = r_{24}\, r_{23} + r_{21}\, p_{34}, \\ \delta_{24}\, a_{11} = r_{14}\, r_{12} + r_{13}\, p_{24}, & \delta_{14}\, a_{22} = r_{24}\, r_{21} + r_{23}\, p_{14}, \\ \delta_{23}\, a_{11} = r_{13}\, r_{12} + r_{14}\, p_{23}, & \delta_{13}\, a_{22} = r_{23}\, r_{21} + r_{24}\, p_{13}, \\ \delta_{24}\, a_{33} = r_{34}\, r_{32} + r_{31}\, p_{24}, & \delta_{22}\, a_{44} = r_{43}\, r_{42} + r_{41}\, p_{23}, \\ \delta_{14}\, a_{33} = r_{34}\, r_{31} + r_{32}\, p_{14}, & \delta_{13}\, a_{44} = r_{43}\, r_{41} + r_{42}\, p_{13}, \\ \delta_{12}\, a_{33} = r_{32}\, r_{31} + r_{34}\, p_{12}, & \delta_{12}\, a_{44} = r_{42}\, r_{41} + r_{43}\, p_{12}, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} a^2_{11}\,\Delta = p_{24}\, p_{34}\, p_{23} - p_{34}\, r^2_{12} - p_{24}\, r^2_{13} - p_{23}\, r^2_{14} - 2\, r_{12}\, r_{13}\, r_{14}, \\ a^2_{22}\,\Delta = p_{14}\, p_{34}\, p_{13} - p_{34}\, r^2_{21} - p_{14}\, r^2_{23} - p_{13}\, r^2_{24} - 2\, r_{21}\, r_{23}\, r_{24}. \\ a^2_{33}\,\Delta = p_{14}\, p_{24}\, p_{12} - p_{24}\, r^2_{31} - p_{14}\, r^2_{32} - p_{12}\, r^2_{34} - 2\, r_{31}\, r_{32}\, r_{34}, \\ a^2_{44}\,\Delta = p_{13}\, p_{23}\, p_{12} - p_{23}\, r^2_{41} - p_{13}\, r^2_{42} - p_{12}\, r^2_{43} - 2\, r_{41}\, r_{42}\, r_{43}. \end{cases}$$

On pourrait encore établir d'autres relations analogues à celles que je viens de signaler ; mais celles-ci nous suffisent pour l'étude que j'ai en vue ; elles sont même surabondantes. Cependant j'ai cru devoir les donner, parce qu'elles peuvent être d'un grand secours dans d'autres recherches sur les surfaces du second ordre.

La suite prochainement.

TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES

(voir page 276);

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Transformation des relations d'aires.

4. *Transformer homographiquement l'aire d'un triangle* a', b', c'.

Soient (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3) les coordonnées des sommets a', b', c', et S' la surface du triangle,

$$2S' = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix},$$

et en ayant égard aux formules de transformation (p. 279)

$$2S' = \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 + c, & a'x_1 + b'y_1 + c', & a''x_1 + b''y_1 + c'' \\ ax_2 + by_2 + c, & a'x_2 + b'y_2 + c', & a''x_2 + b''y_2 + c'' \\ ax_3 + by_3 + c, & a'x_3 + b'y_3 + c', & a''x_3 + b''y_3 + c'' \end{vmatrix} P,$$

nous posons

$$P = \frac{1}{(a''x_1 + b''y_1 + c'')(a''x_2 + b''y_2 + c'')(a''x_3 + b''y_3 + c'')}.$$

La valeur de $2S'$ peut s'écrire

$$2S' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} P.$$

abc étant le triangle homographique au triangle $a'b'c'$, appelons α, β, γ les distances des sommets du triangle abc à la droite I (p. 280), donnée par l'équation

$$a''x + b''y + c'' = 0,$$

et S l'aire de ce triangle,

$$a'' x_1 + b'' y_1 + c'' = \alpha \sqrt{a''^2 + b''^2},$$
$$a'' x_2 + b'' y_2 + c'' = \beta \sqrt{a''^2 + b''^2},$$
$$a'' x_3 + b'' y_3 + c'' = \gamma \sqrt{a''^2 + b''^2},$$

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$S' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} (a''^2 + b''^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{S}{\alpha.\beta.\gamma}.$$

L'aire d'un triangle est égale à celle du triangle homographique divisée par le produit des distances des sommets de ce triangle à la droite I *et multipliée par une constante.*

Dans deux figures homographiques, il existe trois points qui, considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde (p. 280). Si a', b', c' sont ces trois points, $S = S'$, donc

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} (a''^2 + b''^2)^{-\frac{3}{2}} = \alpha.\beta\ \gamma.$$

Ainsi le coefficient numérique qui entre dans la valeur de S' est égal au produit des distances des trois points, qui sont eux-mêmes leurs homologues, à la droite I. Nous désignerons, pour abréger, ce coefficient par la lettre m, de sorte que

$$(1) \qquad S' = m \frac{S}{\alpha.\beta.\gamma}.$$

5. Examinons ce que devient cette formule lorsqu'un ou deux des sommets du triangle abc sont à l'infini, ce

qui revient à supposer les sommets correspondants du triangle a', b', c' sur la droite I′ (p. 280).

Désignons par A, B, C les côtés du triangle abc respectivement opposés aux angles a, b, c, et par a_1, b_1, c_1 les points d'intersection de ces mêmes côtés avec la droite I,

$$S = abc = \frac{1}{2}\, ab.ac \sin(\mathrm{B}, \mathrm{C}),$$

$$\gamma = cb_1 \sin(\mathrm{B}, \mathrm{I}),$$

donc

$$\frac{S}{\alpha.\beta.\gamma} = \frac{1}{2}\,\frac{ab.ac \sin(\mathrm{B}, \mathrm{C})}{\alpha.\beta.cb_1 \sin(\mathrm{B}, \mathrm{I})}.$$

Si l'on suppose le point c à l'infini, $\frac{ac}{cb_1} = 1$,

(1) $$S' = \frac{m}{2}\,\frac{ab \sin(\mathrm{B}, \mathrm{C})}{\alpha.\beta..\sin(\mathrm{B}, \mathrm{I})}.$$

On a aussi

$$\beta = bc_1 \sin(\mathrm{C}, \mathrm{I}).$$

Substituant dans la formule précédente et faisant passer b à l'infini,

(2) $$S' = \frac{m}{2}\,\frac{\sin(\mathrm{B}, \mathrm{C})}{\alpha \sin(\mathrm{B}, \mathrm{I}) \sin(\mathrm{C}, \mathrm{I})}.$$

Pour interpréter géométriquement ces résultats, remarquons que dans la relation (1) les droites ab_1, ba_1 devenant parallèles, lorsque c est à l'infini,

$$\frac{ab \sin(\mathrm{B}, \mathrm{C})}{\sin(\mathrm{B}, \mathrm{I})} = a_1 b_1;$$

donc

$$S' = \frac{m}{2}\,\frac{a_1 b_1}{\alpha.\beta}.$$

Ce segment a_1b_1 est la projection du côté ab du triangle sur la droite I, projection faite au moyen de deux droites ac, bc parallèles à une direction arbitraire.

Cette formule servira à transformer l'aire d'un triangle $a'\,b'\,c'$ dont l'un des sommets c' sera sur la droite I'.

Considérons alors dans la première figure un triangle quelconque $a'\,b'\,c'$, et joignons ses sommets à un point o' pris sur la droite I', on aura

$$a'\,b'\,c' = a'\,b'\,o' + b'\,c'\,o' + c'\,a'\,o',$$

de sorte qu'en transformant d'après la relation précédente,

$$\text{(II)} \qquad a'\,b'\,c' = \frac{m}{2}\left(\frac{a_1\,b_1}{\alpha.\beta} + \frac{b_1\,c_1}{\beta.\gamma} + \frac{c_1\,a_1}{\gamma.\alpha}\right).$$

Relativement à la formule (2), remarquons que l'aire du triangle $a\,b_1\,c_1$ est donnée par la relation

$$a\,b_1\,c_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{b_1\,c_1}^2 \sin(\mathrm{B},\mathrm{I})\sin(\mathrm{C},\mathrm{I})}{\sin(\mathrm{B},\mathrm{C})}:$$

or

$$\frac{\sin \mathrm{BI}}{\sin \mathrm{BC}} = \frac{ac_1}{b_1\,c_1};$$

donc

$$\mathrm{S}' = m.\frac{a\,b_1\,c_1}{\alpha^3}.$$

Cette formule servira à transformer un triangle dont un des côtés coïncidera avec la droite I'. Par conséquent, si l'on considère dans la première figure (*) un triangle quelconque $a'\,b'\,c'$, formé par les côtés A', B', C', on aura

$$a'\,b'\,c' = \mathrm{A}'\,\mathrm{B}'\,\mathrm{I}' + \mathrm{B}'\,\mathrm{C}'\,\mathrm{I}' + \mathrm{C}'\,\mathrm{A}'\,\mathrm{I}',$$

A' B' I' désignant l'aire du triangle formé des côtés A', B', I', etc.

Transformant d'après la dernière formule,

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{S}' = m\left(\frac{a\,b_1\,c_1}{\alpha^3} + \frac{b\,c_1\,a_1}{\beta^3} + \frac{c\,a_1\,b_1}{\gamma^3}\right).$$

(*) Première figure est toujours celle dont on cherche l'homographie, et les lettres sont accentuées. Tm.

6. Cas particulier. *La droite* I *est à l'infini*. On a

$$a'' = b'' = 0,$$

et l'on trouve la relation

$$S' = c'' \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} S.$$

Ainsi dans ce cas le rapport des aires de deux triangles et par conséquent de deux figures homologues est constant. L'une des figures est en effet la projection de l'autre.

7. En comparant les relations (I), (II), (III) on arrive à différentes expressions de l'aire d'un triangle. Ainsi les relations (I) et (III) conduisent à ce théorème :

Si les côtés A, B, C *d'un triangle* abc *sont coupés respectivement en des points* a_1, b_1, c_1 *par une transversale arbitraire, et que l'on désigne par* α, β, γ *les distances des sommets* a, b, c *à cette transversale*, *l'aire* S *du triangle sera donnée par la relation*

$$S = a\, b_1\, c_1 \frac{\beta\,\gamma}{\alpha^2} + b\, c_1\, a_1 \frac{\gamma\,.\,\alpha}{\beta^2} + c\, a_1\, b_1 \frac{\alpha\,.\,\beta}{\gamma^2}.$$

Applications.

8. Un polygone $a', b', c', d', \ldots, f'$ étant tracé dans la première figure, joignons un point arbitraire o' à tous ses sommets. L'aire S' de ce polygone est donnée par la relation

$$S' = a'\, b'\, o' + b'\, c'\, o' + c'\, d'\, o' + \ldots + f'\, a'\, o'.$$

Dans la figure homographique nous avons un polygone $a, b, c, d, \ldots, f$ et un point o. D'après la relation (I) nous aurons

$$S' = m \left(\frac{abo}{\alpha\,.\,\beta\,.\,\omega} + \frac{bco}{\beta\,.\,\gamma\,.\,\omega} + \frac{cdo}{\gamma\,.\,\delta\,.\,\omega} + \ldots \right),$$

α, β, γ,..., ω désignant les distances des sommets a, b, c,.. et du point o à la droite I.

De là résulte ce théorème :

Si l'on décompose un polygone en triangles, en joignant ses sommets à un point arbitraire de son plan, la somme de ces triangles, divisés respectivement par le produit des distances de leurs sommets à une droite fixe, est une quantité constante.

Le point arbitraire peut être à l'infini ; si l'on appelle a_1, b_1, c_1, d_1,... les points d'intersection de la droite fixe I par des droites menées par les sommets a, b, c, d,..., parallèlement à une direction arbitraire, on aura, d'après la relation (II),

$$2S' = m\left(\frac{a_1 b_1}{\alpha.\beta} + \frac{b_1 c_1}{\beta.\gamma} + \frac{c_1 d_1}{\gamma.\delta} + \ldots\right).$$

On a donc ce théorème :

Un polygone étant donné ainsi qu'une droite, si l'on projette les côtés de ce polygone sur la droite au moyen de parallèles à une direction arbitraire, la somme des projections des côtés, divisées respectivement par le produit des distances de leurs extrémités à la droite fixe, est une quantité constante.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

---

1. Il y a bien des moyens de ramener la résolution d'une équation du quatrième degré à celle d'une autre équation du troisième. Le plus simple parait le suivant.

On a identiquement

$$x^4+px^2+qx+r=\left[x^2+\frac{1}{2}(p+\theta)\right]^2-\left(x\sqrt{\theta}-\frac{q}{2\sqrt{\theta}}\right)^2$$
$$+r-\frac{1}{4}(p+\theta)^2+\frac{q^2}{4\theta};$$

si donc on pose

$$r=\frac{1}{4}(p+\theta)^2-\frac{1}{4}\cdot\frac{q^2}{\theta},$$

ou bien

$$(1)\qquad \theta^3+2p\theta^2+(p^2-4r)\theta-q^2=0,$$

le polynôme x^4+px^2+qx+r deviendra

$$\left[x^2+x\sqrt{\theta}+\frac{1}{2}(p+\theta)-\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{\theta}\right]\left[x^2-x\sqrt{\theta}+\frac{1}{2}(p+\theta)+\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{\theta}\right];$$

égalant chaque facteur à zéro, on trouvera les quatre racines

$$2x=\quad\sqrt{\theta}\pm\sqrt{-2p-\theta-\frac{2q}{\sqrt{\theta}}},$$
$$2x=-\sqrt{\theta}\pm\sqrt{-2p-\theta+\frac{2q}{\sqrt{\theta}}}.$$

Comme l'équation en θ a toujours une racine réelle positive, on a les quatre racines sans ambiguïté sous forme réelle ou sous forme imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

2. On peut aussi, d'après la méthode d'Euler (*Alg.*, ch. 15), poser

$$2x=\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}+\sqrt{\theta_3}.$$

Faisant disparaître les radicaux et identifiant avec l'équation

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

on trouve sans difficulté

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=-2p,\quad \theta_1\theta_2+\theta_1\theta_3+\theta_2\theta_3=p^2-4r,$$
$$\sqrt{\theta_1}.\sqrt{\theta_2}.\sqrt{\theta_3}=-q,$$

d'où la même réduite en θ.

Si l'on mettait $\sqrt{\theta_2}+\sqrt{\theta_3}$ sous la forme

$$\sqrt{(\sqrt{\theta_2}+\sqrt{\theta_3})^2}=\sqrt{\theta_2+\theta_3+2\sqrt{\theta_2}.\sqrt{\theta_3}}=\sqrt{-2p-\theta_1-\frac{2q}{\sqrt{\theta_1}}},$$

on retrouverait les formules précédentes. Les signes des radicaux dans la valeur de $2x$ sont déterminés par l'équation

$$\sqrt{\theta_1}\sqrt{\theta_2}.\sqrt{\theta_3}=-q.$$

Comme on a employé l'équation

$$\theta_1.\theta_2.\theta_3=q^2,$$

la réduite (1) appartient à l'équation double

$$x^4+px^2\pm qx+r=0.$$

L'équation

$$2x=\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}+\sqrt{\theta_3}$$

présente en effet huit valeurs, dont quatre appartiennent à l'équation

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

et les quatre autres à l'équation

$$x^4+px^2-qx+r=0.$$

3. En modifiant la méthode d'Euler, on aurait pu poser

$$2x=\sqrt{m\theta_1+n}+\sqrt{m\theta_2+n}+\sqrt{m\theta_3+n},$$

et déterminer m, n de manière à obtenir une réduite du

troisième degré sans second terme, qui s'est présentée à MM. Cayley (*), Hesse, Hermite, Aronhold et à d'autres peut-être.

Prenons l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0;$$

en posant

$$ax + b = y,$$

il viendra

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} y^4 - b(b^2 - ac)y^2 + 4(2b^3 - 3abc + a^2 d)y \\ -(3b^4 - 6ab^2c + 4a^2bd - a^3e) = 0. \end{array} \right.$$

Soit donc

$$y = \sqrt{A\lambda_1 + B} + \sqrt{A\lambda_2 + B} + \sqrt{A\lambda_3 + B} = V_1 + V_2 + V_3,$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant les trois racines de l'équation

$$\lambda^3 + Q\lambda - R = 0,$$

ce qui suppose

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = Q, \quad R = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

A et B devront être déterminés convenablement.

On a d'abord, à cause de $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $y = V_1 + V_2 + V_3$,

$$y^2 - 3B = 2(V_1V_2 + V_2V_3 + V_3V_1).$$

Carrant de nouveau

$$y^4 - 6By^2 + 9B^2 = 4(V_1^2V_2^2 + V_2^2V_3^2 + V_3^2V_1^2) + 8V_1V_2V_3y:$$

or, substituant les valeurs des V^2, on a

$$V_1^2V_2^2 + V_2^2V_3^2 + V_3^2V_1^2 = A^2Q + 3B^2;$$

donc

$$y^4 - 6By^2 - 8V_1V_2V_3y - (3B^2 + 4A^2Q) = 0.$$

(*) Arthur Cayley, avocat, né à Richmond (Surrey), le 16 août 1821.

De là, comparant cette dernière équation avec l'équation (2), on obtient

$$(2) \qquad B = b^2 - ac, \quad Q = \frac{a^2(4bd - ae - 3c^2)}{4A^2};$$

on peut donc faire

$$A = a, \quad Q = \frac{4bd - ae - 3c^2}{4}.$$

Enfin

$$V_1 V_2 V_3 = \sqrt{A^3 R + A^2 BQ + B^3},$$

l'équation

$$4(2b^3 - 3abc + a^2 d) = -8\sqrt{a^3 R + a^2(b^2 - ac)Q + (b^2 - ac)^3}$$

donnera

$$R = \frac{ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd}{4};$$

de là l'équation

$$4\lambda^3 - (ae - 4bd + 3c^2)\lambda + ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0:$$

c'est l'équation

$$4\theta^3 - i\theta + J = 0,$$

de MM. Hermite et Cayley ; en changeant le signe, on a l'équation

$$\Delta = 0,$$

de M. Aronhold (*). Suit la traduction d'une note mise à ce sujet par ce géomètre dans le tome LII du Journal de Crelle.

(*) Siegfried-Henri, professeur de mathématiques à l'école d'architecture de Berlin. Né à Angerburg (Prusse orientale) en 1819.

REMARQUE SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS BIQUADRATIQUES;

PAR M. LE Dr S. ARONHOLD, DE BERLIN.

Si l'on représente l'équation donnée par

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

et que l'on calcule les déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c+2\lambda \\ b, & c-\lambda, & d \\ c+2\lambda, & d, & e \end{vmatrix}, \quad \frac{d\Delta}{de} = \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c-\lambda \end{vmatrix},$$

alors $\Delta = 0$ est une équation cubique de la forme

$$\Delta = -4\lambda^3 + (ae - 4bd + 3c^2)\lambda + ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd = 0,$$

qui, manquant du second terme, pourra être résolue directement par la règle de Cardan. Soient

$$\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_1, \quad \left(\frac{d\Delta}{de}\right)_2, \quad \left(\frac{d\Delta}{de}\right)_3$$

les valeurs du second déterminant pour les trois racines de l'équation $\Delta = 0$, on aura

$$(1) \quad x = \frac{1}{a}\left[-b \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_1} \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_2} \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_3}\right],$$

où les signes correspondants doivent être tels, que le produit soit positif.

On a encore plus généralement, pour des valeurs quel-

conques de ξ et de η,

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{(ax+b)\,\xi^3+3\,(bx+c)\,\xi^2\eta+3\,(cx+d)\,\xi\eta^2+(dx+e)\,\eta^3}{\xi-\eta x} \\ = \left\{\begin{array}{l} \pm\sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_1\xi^4-\left(\frac{d\Delta}{dd}\right)_1\xi^3\eta+\left(\frac{d\Delta}{dc}\right)_1\xi^2\eta^2-\left(\frac{d\Delta}{db}\right)_1\xi\eta^3+\left(\frac{d\Delta}{da}\right)_1\eta^4} \\ \pm\sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_2\xi^4-\left(\frac{d\Delta}{dd}\right)_2\xi^3\eta+\left(\frac{d\Delta}{dc}\right)_2\xi^2\eta^2-\left(\frac{d\Delta}{db}\right)_2\xi\eta^3+\left(\frac{d\Delta}{da}\right)_2\eta^4} \\ \pm\sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_3\xi^4-\left(\frac{d\Delta}{dd}\right)_3\xi^3\eta+\left(\frac{d\Delta}{dc}\right)_3\xi^2\eta^2-\left(\frac{d\Delta}{db}\right)_3\xi\eta^3+\left(\frac{d\Delta}{da}\right)_3\eta^4} \end{array}\right\}, \end{array}\right.$$

d'où l'on tire la valeur précédente de x en faisant $\xi = 1$, $\eta = 0$; pour $\xi = 0$, $\eta = 1$, on obtiendrait $\frac{1}{x}$.

Les déterminants doivent toujours être calculés de manière que le terme provenant de la diagonale de gauche à droite soit pris négativement.

Note du Traducteur. Comme

$$\frac{d\Delta}{de} = a\lambda + b$$

et que

$$ax + b = y,$$

on a

$$x = \frac{1}{a}(-b + y),$$

la formule (1) est vérifiée par ce qui précède. La démonstration de la formule (2) exige quelques explications qui pourront être données dans un autre article.

SOLUTIONS DES QUESTIONS 440 ET 442

(voir page 296);

PAR M. P. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

Les deux identités proposées peuvent se déduire d'une même formule qui peut servir à en trouver une infinité d'autres.

Soient x une variable positive entière qui peut être nulle; P_x une fonction déterminée de cette variable; i, n des nombres entiers positifs; en ajoutant membre à membre les n identités suivantes :

$$\frac{1}{P_x} - \frac{1}{P_{x+1}} = \frac{P_{x+1} - P_x}{P_x P_{x+1}},$$

$$\frac{1}{P_{x+i}} - \frac{1}{P_{x+i+1}} = \frac{P_{x+i+1} - P_{x+i}}{P_{x+i} P_{x+i+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{P_{x+n-1}} - \frac{1}{P_{x+n}} = \frac{P_{x+n} - P_{x+n-1}}{P_{x+n-1} P_{x+n}},$$

on a l'identité

$$\text{(A)} \qquad \frac{P_{x+n} - P_x}{P_x P_{x+n}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_{x+i} - P_{x+i-1}}{P_{x+i-1} P_{x+i}};$$

en posant successivement

$$P_x = a_0 + a_1 + \ldots + a_x,$$

$$P_x = \operatorname{tang}(a_0 + a_1 + \ldots + a_x),$$

$$P_x = \cot(a_0 + a_1 + \ldots + a_x),$$

$$P_x = \log(a_0 + a_1 + \ldots + a_x),$$

on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{a_{x+1}+\ldots+a_{x+n}}{(a_0+\ldots+a_x)(a_0+\ldots+a_{x+n})}\\ &=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{a_{x+i}}{(a_0+\ldots+a_{x+i-1})(a_0+\ldots+a_{x+i})}, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin(a_{x+1}+\ldots+a_{x+n})}{\sin(a_0+\ldots+a_x)\sin(a_0+\ldots+a_{x+n})}\\ &=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\sin a_{x+i}}{\sin(a_0+\ldots+a_{x+i-1})\sin(a_0+\ldots+a_{x+i})}, \end{aligned} \right.$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin(a_{x+1}+\ldots+a_{x+n})}{\cos(a_0+\ldots+a_x)\cos(a_0+\ldots+a_{x+n})}\\ &=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\sin a_{x+i}}{\cos(a_0+\ldots+a_{x+i-1})\cos(a_0+\ldots+a_{x+i})}, \end{aligned} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\log\left(\dfrac{a_0+\ldots+a_{x+n}}{a_0+\ldots+a_x}\right)}{\log(a_0+\ldots+a_x)\log(a_0+\ldots+a_{x+n})}\\ &=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\log\left(\dfrac{a_0+\ldots+a_{x+i}}{a_0+\ldots+a_{x+i-1}}\right)}{\log(a_0+\ldots+a_{x+i-1})\log(a_0+\ldots+a_{x+i})}; \end{aligned} \right.$$

en posant $x=0$ dans (1) et (2), on a les identités proposées dans les questions 440, 442.

L'énoncé de la question 440 renferme une faute d'impression ; le premier facteur du dénominateur doit être a_0, et non a_n dans le premier membre.

Note. M. Delestrée, élève au lycée Saint-Louis, a donné une bonne solution particulière de la question 442, ainsi que M. G. Andanson, candidat à la Licence, à Lyon.

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

Déterminer les valeurs numériques des trois côtés d'un triangle rectiligne tel, que ses trois côtés et sa surface soient quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique ayant pour raison l'unité.

Soient $x-1$, x, $x+1$, $x+2$ les trois côtés et la surface du triangle cherché. Le demi-périmètre sera $\frac{3x}{2}$, et la formule qui sert à exprimer la surface en fonction des côtés donnera

$$x+2=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{3.\left(\frac{x^2}{4}-1\right)},$$

ou

$$(1)\qquad 2+\frac{4}{x}=\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}.$$

Il est évident que l'équation (1) admet pour racine le nombre 4.

Pour toute valeur de x plus grande que 4, on a

$$2+\frac{4}{x}<3,$$

et

$$\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}>3.$$

Pour toute valeur positive de x plus petite que 4, on a

$$2+\frac{4}{x}>3,$$

et

$$\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}<3;$$

ou

$$\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}$$

imaginaire.

Donc, l'équation (1) n'admet pour racine positive que le nombre 4.

Par conséquent, les nombres 3, 4, 5, 6 sont les valeurs des trois côtés et de la surface du triangle demandé.

Note. C'est encore là une ancienne question proposée, plusieurs fois, dans les concours d'admission à l'École Polytechnique. Elle n'a pas été, d'abord, résolue *spontanément;* mais, au concours de l'année suivante, plusieurs candidats, en la traitant, ont fait preuve de *spontanéité :* ce qui leur a été très-utile. G.

SOLUTION DE LA QUESTION 316

(voir t. XV, p. 52);

PAR M. CHANSON,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Etant donnée la progression arithmétique

$$a, \quad a+r, \quad a+2r, \ldots, \quad a+nr$$

dans laquelle a et r sont premiers entre eux, faire voir qu'on peut y trouver un nombre illimité de termes premiers avec un nombre donné quelconque A.

Cela revient à dire qu'on peut choisir n d'une infinité de manières de sorte que $a+nr$ soit premier avec A.

Pour cela, je distingue trois cas :

1°. Celui où A est premier à la fois avec a et r.

Soit

$$A = b^{b'} c^{c'} d^{d'};$$

je n'ai qu'à poser

$$n = b^y c^z d^u,$$

y, z, u pouvant d'ailleurs varier d'une infinité de manières. Je dis que A sera premier avec $a + nr$; car si un facteur premier de A divisait la somme $a + nr$ comme il divise une de ses parties nr (car n renferme par hypothèse tous les facteurs premiers de A), il diviserait l'autre partie a, ce qui est contre l'hypothèse, n étant premier avec a.

2°. A est premier avec un des nombres a et r seulement, avec a par exemple.

Soient

$$r = \alpha^{\alpha'} \beta^{\beta'}, \ldots, \quad A = \alpha^{\alpha''} \beta^{\beta''} \ldots b^{b'} c^{c'} d^{d'}, \ldots;$$

je n'ai qu'à prendre

$$n = b^y c^z d^u,$$

c'est-à-dire égal au produit de tous les facteurs premiers de A qui n'entrent pas dans r avec des exposants quelconques. Il est clair alors que A sera premier avec $a + nr$; car si α ou un facteur analogue (c'est-à-dire un des facteurs qui entrent dans r) divisait $a + nr$ divisant nr, il devrait diviser a, ce qui est contre l'hypothèse, parce que a est supposé premier avec r. Si c'était un des facteurs b, c qui n'entrent pas dans r qui divisât $a + nr$, on arriverait à la même absurdité.

Si A était premier avec r seulement, on raisonnerait de la même façon.

Passant donc au troisième cas, c'est-à-dire à celui où A n'est premier ni avec a ni avec r, alors si

$$r = \alpha^{\alpha'} \beta^{\beta'}, \ldots, \quad a = \gamma^{\gamma'} \delta^{\delta'}, \ldots, \text{ et } A = \alpha^p \ldots \gamma^q \ldots b^{b'} c^{c'} \ldots,$$

je choisis

$$n = b^y c^z \ldots,$$

y, z pouvant être quelconques. Je démontrerai comme

précédemment qu'aucun facteur de A ne peut diviser $a + nr$; car n ayant été choisi de la manière indiquée, ce facteur diviserait une des parties de la somme, et, par suite, diviserait l'autre, ce qui conduirait à une absurdité.

Note du Rédacteur. Dans les cas deuxième et troisième, quand A n'aura pas d'autres facteurs premiers que ceux qui entrent dans a et r, on aura $n = 1$, mais quand $a + \alpha r$ est premier à A, $a + (\alpha + kA) r$ l'est également; il y a donc encore dans $a + nr$ une *infinité* de nombres premiers à A.

L'avantage de la démonstration précédente est de ne pas supposer la résolution de l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues. Jacobi, dans l'introduction de son *Canon arithmeticus,* indique une démonstration qui suppose cette résolution, et qui peut donner l'expression générale des valeurs de n qui rendent $a + nr$ premier au nombre A.

On y lit :

« *Observo si* A *et* B *inter se primi sint, semper effici posse addendo ipsi* A *multiplum ipsius* B *ut prodeat numerus ad alium quemlibet* C *primus.* Sit enim B′ factor maximus ipsius C ad B primus sive $\frac{C}{B'}$ factor maximus communis ipsorum B et C ideoque primus ad numeros A, $A + \alpha B$; erit $A + \alpha B$ ad C primus, si ad B′ primus est; sub forma autem $A + \alpha B$ pro diversis ipsius α valoribus continentur numeri, qui respectu moduli B′ ad B primi residua quæcunque placet relinquunt; inde etiam forma $A + \alpha B$ continet numeros ad B′ primos, q. d. e.

Il y a ici omission ou erreur de copie.

Soient

$$B = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots \times p^{\lambda} q^{\mu} \ldots ,$$
$$C = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots \times r^{\rho} s^{\sigma} \ldots ,$$

$a, b, c, \ldots, p, q, \ldots, r, s$ étant premiers, on aura

$$B' = r^{\rho} s^{\sigma} \ldots, \quad \frac{C}{B'} = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\delta'} \ldots,$$

qui n'est pas le plus grand commun diviseur de C et B, mais bien un multiple de ce plus grand commun diviseur.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 296

(voir t. XIV, p. 142);

Par M. DE JONQUIÈRES.
Lieutenant de vaisseau.

La question peut s'exprimer ainsi :

Étant donnés sur un plan deux systèmes de sept points qui se correspondent un à un, trouver dans ce plan deux points P, P′ *tels, que si on les joint aux points donnés, respectivement, les deux faisceaux résultants soient homographiques.*

Cette question est *déterminée*, car elle comporte quatre conditions, savoir que les quatre rapports anharmoniques

$$P(abcd), \quad P(abce), \quad P(abcf), \quad P(abcg)$$

soient égaux respectivement aux quatre rapports anharmoniques

$$P'(a'b'c'd'), \quad P'(a'b'c'e'), \quad P'(a'b'c'f'), \quad P'(a'b'c'g'),$$

et il faut précisément quatre éléments pour déterminer deux points, par exemple leurs distances à deux axes fixes, telles que leurs coordonnées x, y.

Si les deux systèmes se composent de six points chacun, au lieu de sept, la question est *indéterminée*, puisqu'elle ne comporte que trois conditions. D'ailleurs on ne peut pas prendre arbitrairement un point P. Donc une infinité de points satisfont à la question, et ils sont distribués sur un lieu géométrique qu'il s'agit de déterminer.

Cette détermination entraînera évidemment la solution complète du problème proposé, et par conséquent elle constitue la seule difficulté qu'il présente. En effet, si ces lieux géométriques, relatifs aux systèmes a, b, c, d, e, f et a', b', c', d', e', f', sont deux courbes U et U' et sont deux autres courbes V, V' relativement aux systèmes a, b, c, d, e, g et a', b' c', d', e', g', il est clair que les points communs aux courbes U et V, et les points communs aux courbes U' et V', seront précisément ceux qui résolvent la question.

Les raisonnements étant identiques pour chacune de ces quatre courbes, il suffit de s'occuper de la courbe U.

Je dis qu'elle passe par les six points a, b, c, d, e, f, et qu'elle n'a pas de points multiples en ces points. Car si l'on suppose le point P en a, par exemple, et qu'on détermine le point P' tel, que le faisceau P' $(b'c'd'e'f')$ soit homographique au faisceau P $(bcdef)$, lequel point a toujours, comme on sait, une position et une seule; comme la direction de la droite Pa est indéterminée, on peut dire que le point P satisfait à la question que le faisceau P $(abcdef)$ soit homographique au faisceau P' $(a'b'c'd'e'f')$; ce qui prouve que la courbe cherchée passe par le point P, qui est ici le point a; et elle n'y passe qu'une fois, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de point multiple en ce point, parce qu'il n'existe qu'une seule position correspondante du point P'.

Cela posé, je vais démontrer qu'une conique quelcon-

que C, menée par les quatre points a, b, c, d, ne peut rencontrer la courbe cherchée qu'en deux points autres que ces quatre là, ce qui suffira pour prouver que cette courbe est du troisième ordre.

Soit C' la conique *homographique* passant par les quatre points a', b', c', d', c'est-à-dire la conique qui est *capable* du même rapport anharmonique que C, ou qui *sous-tend* le même rapport que C. Deux points fixes O, O', pris sur ces deux courbes respectivement, donnent lieu à deux rapports anharmoniques égaux

$$O(abcd), \quad O'(a'b'c'd').$$

Qu'on prenne sur la seconde un point P' arbitrairement; il lui correspond sur la première un point P, et un seul, tel que le rapport anharmonique $P(abce)$ est égal au rapport anharmonique $P(a'b'c'e')$; et réciproquement, un point P étant pris sur la première conique, il lui correspond sur la seconde un seul point P' tel, que les deux rapports anharmoniques soient égaux. Donc les deux droites OP et O'P' tournant autour des deux points fixes O, O' *se correspondent anharmoniquement*. Que l'on considère maintenant le rapport anharmonique $P'(a'b'c'f')$; il correspondra au point P' un point P_1 sur la conique C tel, que le rapport anharmonique $P_1(abcf)$ sera égal à $P'(a'b'c'f')$, et la droite OP_1 *correspondra anharmoniquement* à la droite O'P'. Donc les deux droites OP et OP_1 se correspondent anharmoniquement, c'est-à-dire qu'elles forment deux faisceaux homographiques. Ces deux faisceaux ont deux rayons doubles (réels ou imaginaires) dont chacun détermine, sur la conique C, un point P auquel correspond, sur la conique C', un point P' tel, que les deux rapports anharmoniques

$$P'(a'b'c'e') \quad \text{et} \quad P'(a'b'c'f')$$

sont égaux respectivement aux deux rapports anharmoniques

$$P(abce) \quad \text{et} \quad P(abcf).$$

Le point P appartient donc à la courbe cherchée. Et comme il n'existe que deux rayons doubles, il n'existe aussi que deux points semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

Donc la courbe U, lieu des points P, est du troisième ordre, et il en est de même de la courbe U', lieu des points P'.

La démonstration qui précède fait voir comment on pourra se procurer un nombre de points suffisants pour construire ces courbes, et elle montre aussi de quelle manière leurs points respectifs se conjuguent deux à deux pour satisfaire aux conditions du problème. On connaît déjà six points de chacune d'elles : ce sont les six points donnés dans chaque système, et il est d'ailleurs à peu près inutile de remarquer que si le point P est placé en l'un quelconque a des points du premier système, le point conjugué P' ne se trouve pas en a' généralement.

Les courbes V et V' sont également des courbes du troisième ordre passant respectivement par les six points a, b, c, d, e, g et a', b', c', d', e', g'.

Les courbes U et V, ayant en commun les cinq points a, b, c, d, e se coupent en quatre autres points p, q, r, s, et les courbes U' et V' se coupent aussi en quatre points p', q', r', s' autres que a', b', c', d', e'. Les quatre premiers sont les points P et les quatre autres sont les points P', qui satisfont à l'énoncé du problème général, lequel admet ainsi quatre solutions, qui peuvent d'ailleurs être, en tout ou en partie, réelles ou imaginaires, celles-ci marchant toujours par couples comme de raison.

Quant à la construction des points p, q, etc., elle s'effectue *géométriquement*, d'une manière très-simple, sans

exiger le tracé des courbes du troisième ordre qui sont seulement déterminées par neuf de leurs points respectivement. Mais je n'entrerai pas ici dans le détail de cette question accessoire, qui est résolue complétement dans l'ouvrage que j'ai publié sous le titre de *Mélanges de Géométrie pure*, chap. IV, n° 41.

Mais les quatre points d'intersection p, q, r, s de ces deux courbes ne peuvent pas satisfaire tous les quatre à la question, et par conséquent il y en a au moins un qui lui est étranger. Car s'ils satisfaisaient tous les quatre, une troisième courbe, construite avec les six points a, b, c, d, f, g, passerait aussi par ces quatre points. Cette courbe et les deux premières auraient donc huit points communs, savoir, a, b, c, d et les quatre p, q, r, s. Par conséquent les trois courbes passeraient par un même neuvième point. Ce point serait e à l'égard des deux premières courbes, f à l'égard de la première et de la troisième, et g à l'égard de la deuxième et de la troisième. Résultat impossible. Donc le problème proposé n'admet que trois solutions, ainsi que M. Chasles l'a annoncé dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir page 370);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

---

§ II. — *Discussion.*

8. Soit l'équation générale des surfaces du second

ordre

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3 \\ \quad +2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4 \end{array}\right\}=0$$

J'admets d'abord que cette équation renferme le carré d'une au moins des variables x_1, x_2, x_3, de x_1^2, par exemple, et qu'on ait rendu positif le coefficient a_{11} du carré restant ; c'est cette lettre qu'on devra placer au sommet de gauche du descriminant Δ.

Puisque a_{11} n'est pas nul, on peut ordonner l'équation (I) par rapport à la variable x_1, et la mettre sous la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)x_2^2 \\ \quad +(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)x_3^2+(a_{11}a_{44}-a_{14}^2)x_4^2 \\ \quad +2(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})x_2x_3+2(a_{11}a_{24}-a_{12}a_{14})x_2x_4 \\ \quad +2(a_{11}a_{34}-a_{13}a_{14})x_3x_4 \end{array}\right\}=0,$$

ou

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{l} X_1^2+p_{34}x_2^2+p_{24}x_3^2+p_{23}x_4^2-2r_{14}x_2x_3-2r_{13}x_2x_4 \\ \quad -2r_{12}x_3x_4=0, \end{array}\right.$$

en ayant égard aux formules (4) et en posant

$$X_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4.$$

Les hypothèses distinctes qu'il faudra faire pour élucider complétement tous les cas possibles sont au nombre de quatre ; nous allons les parcourir successivement.

Première hypothèse.

Le déterminant p_{34} ou $\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ est différent de zéro.

9. On pourra alors continuer la décomposition en or-

donnant par rapport à la variable x_2, ce qui donnera

$$X_1^2 + p_{34} X_2^2 + \frac{p_{24} p_{34} - r_{14}^2}{p_{34}} x_3^2 - 2 \frac{p_{34} r_{12} + r_{13} r_{14}}{p_{34}} x_3 x_4 + \frac{p_{34} p_{23} - r_{13}^2}{p_{34}} x_4^2 = 0,$$

après avoir posé (*voir* les formules 4)

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\, da_{44}} X_2 = \frac{d^2\Delta}{da_{33}\, da_{44}} x_2 - \frac{d^2\Delta}{da_{23}\, da_{44}} x_3 - \frac{d^2\Delta}{da_{24}\, da_{33}} x_4;$$

ou, en faisant usage des relations (7) et (9),

$$\text{(III)} \left\{ X_1^2 + p_{34} X_2^2 + \frac{a_{11} \delta_{44}}{p_{34}} x_3^2 - 2 \frac{a_{11} \delta_{34}}{p_{34}} x_3 x_4 + \frac{a_{11} \delta_{33}}{p_{34}} x_4^2 = 0. \right.$$

Le déterminant δ_{44} ou $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ est un *invariant*; cette expression jouit de la propriété caractéristique de se reproduire, quelle que soit la transformation de coordonnées *uni-modulaire* que l'on fasse subir à l'équation (I).

10. Supposons que l'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ soit différent de zéro; on pourra encore continuer la décomposition par rapport à la variable x_3, et l'on obtiendra

$$X_1^2 + p_{34} X_2^2 + \frac{a_{11} \delta_{44}}{p_{34}} X_3^2 + \frac{a_{11}}{p_{34}} \frac{\delta_{33} \delta_{44} - \delta_{34}^2}{\delta_{44}} x_4^2 = 0,$$

après avoir posé (*voir* les formules 2)

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} X_3 = \frac{d\Delta}{da_{44}} x_3 - \frac{d\Delta}{da_{34}} x_4.$$

Si enfin l'on a égard à la première des relations (5), on sera conduit à la forme définitive

$$\text{(IV)} \quad X_1^2 + \frac{d^2\Delta}{da_{33}\, da_{44}} X_2^2 + \frac{a_{11} \dfrac{d\Delta}{da_{44}}}{\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\, da_{44}}} X_3^2 + \frac{a_{11}\, \Delta}{\dfrac{d\Delta}{da_{44}}} x_4^2 = 0.$$

On conclura donc, dans l'hypothèse actuelle, que lorsque l'*invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *est différent de zéro, l'équation* (I) *représente des surfaces à centre unique* (théorème n° 2).

Les coordonnées du centre seront données par les équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0.$$

Pour discuter l'équation (IV) je distinguerai deux cas.

Premier cas. *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *et le déterminant* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *étant tous deux positifs*, on voit que l'équation (IV) appartient au *genre ellipsoïde*, et que

Si $\Delta < 0$, on a un ellipsoïde réel;

Si $\Delta = 0$, on a un point;

Si $\Delta > 0$, on a un ellipsoïde imaginaire.

Second cas. *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *étant différent de zéro et n'étant pas positif en même temps que le déterminant* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$, l'équation (IV) appartient au *genre hyperboloïde*.

Avec $\Delta > 0$, on aura à considérer :

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad +;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad -;$$

3°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad -;$$

on reconnaît dans ces différents cas l'hyperboloïde à une nappe.

Avec $\Delta < 0$, on aura à considérer :

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad -;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad +;$$

3°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad +;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à deux nappes.

Enfin, avec $\Delta = 0$, on aura à considérer

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad -;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad -;$$

3°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad +;$$

on reconnaît le cône.

Donc, en résumé,

Si $\Delta < 0$, on a un hyperboloïde à deux nappes;

Si $\Delta = 0$, on a un cône;

Si $\Delta > 0$, on a un hyperboloïde à une nappe.

11. Supposons maintenant que l'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ soit nul.

Il faut remonter à l'équation (III), et y introduire l'hypothèse $\frac{d\Delta}{da_{44}} = \delta_{44} = 0$; elle devient alors

$$X_1^2 + p_{34} X_2^2 - 2\frac{a_{11}\,\delta_{34}}{p_{34}} x_3 x_4 + \frac{a_{11}\,\delta_{33}}{p_{34}} x_4^2 = 0.$$

On conclura donc, dans l'hypothèse actuelle, que lorsque l'*invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *est nul, l'équation* (I) *représente des surfaces dénuées de centre ou possédant une infinité de centres* (n° 2).

Afin de discuter l'équation (V) observons que la première des relations (5) (§ Ier) donne, dans le cas actuel,

(1) $$\Delta p_{34} = -(\delta_{34})^2,$$

ce qui montre que Δ et p_{34} sont de signes contraires, et, en outre, que Δ et δ_{34} s'annulent en même temps, puisqu'on suppose p_{34} différent de zéro.

Je distinguerai encore deux cas.

Premier cas. *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *étant nul, et le discriminant* Δ *différent de zéro*, l'équation (V) appartient au *genre paraboloïde* ; et si

$\Delta < 0$, c'est-à dire $p_{34} > 0$, on a un paraboloïde elliptique;

$\Delta > 0$, c'est-à-dire $p_{34} < 0$, on a un paraboloïde hyperbolique.

Second cas. *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *étant nul ainsi que le discriminant* Δ, l'équation (V) appartient au *genre cylindrique*.

On voit, en effet, par la relation (1), que si $\Delta = 0$, on aura $\delta_{34} = 0$, et réciproquement; l'équation (V) prendra donc la forme

$$\text{(VI)} \qquad X_1^2 + \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} X_2^2 + a_{11} \frac{\frac{d\Delta}{da_{33}}}{\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}} x_4^2 = 0,$$

et si

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} > 0,$$

on aura un cylindre elliptique imaginaire;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} < 0,$$

on aura un cylindre elliptique;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} \gtrless 0,$$

on aura un cylindre hyperbolique;

$$\text{si } \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0,$$

on aura deux plans imaginaires qui se coupent ou une droite ;

$$\text{si } \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0,$$

on aura deux plans qui se coupent.

Seconde hypothèse.

Le déterminant p_{34} *ou* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *est nul, et le déterminant* p_{24} *ou* $\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}$ *est différent de zéro.*

12. Dans cette hypothèse, il faut avoir recours à l'équation (II), qui devient alors :

$$X_1^2 + p_{24}x_3^2 + p_{23}x_4^2 - 2r_{14}x_2x_3 - 2r_{13}x_2x_4 - 2r_{12}x_3x_4 = 0.$$

Le coefficient p_{24} étant différent de zéro, on pourra ordonner par rapport à la variable x_3 et mettre l'équation sous cette forme

$$X_1^2 + p_{24}X_2^2 - \frac{r_{14}^2}{p_{24}}x_2^2 + \frac{p_{24}p_{23} - r_{12}^2}{p_{24}}x_4^2$$
$$- 2\frac{p_{24}r_{13} + r_{12}r_{14}}{p_{24}}x_2x_4 = 0,$$

après avoir posé (*voir* les formules 4)

$$\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}X_2 = \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}x_2 - \frac{d^2\Delta}{da_{23}\,da_{44}}x_3 - \frac{d^2\Delta}{da_{34}\,da_{22}}x_4;$$

et enfin, en ayant égard aux relations (7) et (9), et y introduisant l'hypothèse $p_{34} = 0$, on trouvera

$$(\text{VII}) \quad X_1^2 + p_{24}X_2^2 + \frac{a_{11}\delta_{33}}{p_{24}}x_2^2 - 2\frac{a_{11}\delta_{23}}{p_{24}}x_2x_4 + \frac{a_{11}\delta_2}{p_{24}}x_4^2 = 0.$$

13. Supposons que l'invariant δ_{44} soit différent de zéro; on pourra encore continuer la décomposition par rapport à la variable x_2, et on obtiendra

$$X_1^2 + p_{24} X_2^2 + \frac{a_{11}\delta_{44}}{p_{24}} X_3^2 + \frac{a_{11}}{p_{24}} \cdot \frac{\delta_{22}\delta_{44} - \delta_{24}^2}{\delta_{14}} x_4^2 = 0,$$

après avoir posé

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} X_2 = \frac{d\Delta}{da_{44}} x_2 - \frac{d\Delta}{da_{24}} x_4;$$

ou enfin, en faisant intervenir la seconde des relations (5),

$$(\text{VIII}) \qquad X_1^2 + \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} X_2^2 + \frac{a_{11}\dfrac{d\Delta}{da_{44}}}{\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}} X_3^2 + \frac{a_{11}\Delta}{\dfrac{d\Delta}{da_{44}}} x_4^2 = 0.$$

Or on admet $\delta_{44} \gtrless 0$, et $p_{34} = 0$; la première des relations (7) donne

$$(2) \qquad \delta_{44}\, a_{11} = -(r_{14})^2;$$

d'où il résulte que $\dfrac{d\Delta}{da_{44}}$ est nécessairement négatif.

Avec $\Delta > 0$, on aura à considérer :

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad -;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad -;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à une nappe.

Avec $\Delta < 0$, on aura à considérer :

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\, da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad + ;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\, da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad + ;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à deux nappes.

Enfin avec $\Delta = 0$, on aura à considérer :

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\, da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - ;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0, \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\, da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + ;$$

on reconnaît le cône.

Cette analyse complète le résumé correspondant au second cas de la première hypothèse (10).

14. Supposons maintenant que l'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ soit nul. Introduisant cette hypothèse dans l'équation (VII), il vient

$$\text{(IX)} \qquad X_1^2 + p_{24} X_2^2 - 2\frac{a_{11}\,\delta_{24}}{p_{24}} x_2 x_4 + \frac{a_{11}\,\delta_{22}}{p_{24}} x_4^2 = 0.$$

Or la seconde des relations (5) donne, puisque $\delta_{44} = 0$,

(3) $$\Delta p_{24} = -(\delta_{24})^2,$$

ce qui montre que Δ et p_{24} sont de signes contraires, et, en outre, que Δ et δ_{24} s'annulent en même temps, puisqu'on suppose p_{24} différent de zéro.

Je distinguerai deux cas.

Premier cas. *Le discriminant Δ est différent de zéro.*

Alors δ_{24} est différent de zéro, et on voit que si

$\Delta < 0$, c'est-à-dire $p_{24} > 0$, on a un paraboloïde elliptique;
$\Delta > 0$, c'est-à-dire $p_{24} < 0$, on a un paraboloïde hyperbolique.

Second cas. *Le discriminant Δ est nul.*

Alors $\delta_{24} = 0$, et réciproquement. Dans ce cas, l'équation (IX) se réduit à

(X) $$X_1^2 + \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} X_2^2 + \frac{a_{11}\dfrac{d\Delta}{da_{22}}}{\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}} X_4^2 = 0.$$

Or la triple hypothèse ($p_{34} = 0$, $\delta_{44} = 0$, $\delta_{24} = 0$), introduite dans la première et la seconde des relations (7), donne

(4) $$r_{14} = 0, \quad \text{et} \quad \delta_{33}\,a_{11} = -(r_{13})^2;$$

puis dans la seconde des relations (9)

$$r_{13}\,p_{24} = 0,$$

et, comme p_{24} est différent de zéro, on en conclut $r_{13} = 0$, et par suite

(5) $$\delta_{33} = 0.$$

La distinction des différentes espèces de surfaces ne peut donc plus se fonder sur la considération des détermi-

nants

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} \quad \text{et} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}},$$

qui sont nuls tous deux; il faut y substituer les détermi-
nants

$$\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} \quad \text{et} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}}.$$

L'équation (X) nous conduira aux conséquences suivantes :

Lorsque

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} \gtrless 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta = 0,$$

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} > 0,$$

on a un cylindre elliptique imaginaire;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} < 0,$$

on a un cylindre elliptique;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} \gtrless 0,$$

on a un cylindre hyperbolique;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0,$$

on a deux plans imaginaires qui se coupent;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0,$$

on a deux plans qui se coupent.

Cette étude complète les résultats établis dans la première hypothèse (11).

Troisième hypothèse.

Les deux déterminants $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *et* $\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}$ *sont nuls.*

15. L'équation (II), à laquelle il faut maintenant avoir recours, devient

$$X_1^2 + p_{23}\,x_4^2 - 2r_{14}\,x_2\,x_3 - 2r_{13}\,x_2\,x_4 - 2r_{12}\,x_3\,x_4 = 0.$$

Or cette dernière équation peut être soumise aux transformations suivantes :

$$X_1^2 - (r_{14}\,x_2 + r_{12}\,x_4)\left(2x_3 + 2\frac{r_{13}}{r_{14}}x_4\right) + \frac{r_{14}\,p_{23} + 2r_{12}\,r_{13}}{r_{14}}\,x_4^2 = 0\,;$$

ou, en posant

$$2X_2 = r_{14}\,x_2 + r_{12}\,x_4 + 2x_3 + 2\frac{r_{13}}{r_{14}}x_4\,;$$

$$2X_3 = r_{14}\,x_2 + r_{12}\,x_4 - 2x_3 - 2\frac{r_{13}}{r_{14}}x_4\,;$$

$$\text{(XI)}\qquad X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 + \frac{r_{14}\,p_{23} + 2r_{12}\,r_{13}}{r_{14}}\,x_4^2 = 0.$$

Or en y faisant $p_{34} = 0$, $p_{24} = 0$, les trois premières des relations (7) (§ I[er]) donnent

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} \delta_{44}\,a_{11} = -r_{14}^2\,; \\ \delta_{33}\,a_{11} = -r_{13}^2\,; \\ \delta_{22}\,a_{11} = -r_{12}^2\,; \end{cases}$$

mais la troisième du groupe (9), c'est-à-dire

$$\delta_{23}\,a_{11} = r_{13}\,r_{12} + r_{14}\,p_{23}$$

nous conduira à

$$\delta_{22}\,\delta_{33} - \delta_{23}^2 = -\frac{r_{14}^2\,p_{23}^2 + 2r_{12}\,r_{13}\,r_{14}\,p_{23}}{a_{11}^2}\,;$$

et comme (relations 5, § Ier)

$$\Delta p_{23} = \delta_{22}\,\delta_{33} - \delta_{23}^2\,;$$

il en résulte

(7) $$\Delta = -\frac{r_{14}}{a_{11}^2}\,(r_{14}\,p_{23} + 2\,r_{12}\,r_{13}).$$

16. Si l'on suppose $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ différent de zéro, ce qui, en vertu de la relation

$$\delta_{44}\,a_{11} = -(r_{14})^2$$

exige que r_{14} ne soit pas nul, et montre, en même temps, que $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ est essentiellement négatif, l'équation (XI) peut s'écrire :

(XII) $$X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 + a_{11}\frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}}x_4^2 = 0\,;$$

par suite, si

$\Delta < 0$, on a un hyperboloïde à deux nappes;
$\Delta = 0$, on a un cône;
$\Delta > 0$, on a un hyperboloïde à une nappe.

17. Admettons, en second lieu, que l'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ soit nul.

Les trois hypothèses

$$p_{34} = 0, \quad p_{24} = 0, \quad \delta_{44} = 0,$$

donnent, d'après les relations (5) § Ier,

(8) $$\delta_{34} = 0, \quad \delta_{24} = 0\,;$$

puis, d'après la première des relations (7) § Ier,

(9) $$r_{14} = 0\,;$$

et enfin d'après la première des relations (10), § Ier,

$$(10) \qquad \Delta = 0.$$

D'un autre côté l'équation (II) se réduit à

$$(\text{XIII}) \qquad X_1^2 - 2r_{13}x_2x_4 - 2r_{12}x_3x_4 + p_{23}x_4^2 = 0.$$

C'est un cylindre parabolique.

Ainsi, lorsque

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0, \qquad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} = 0, \qquad \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0,$$

ce qui entraîne comme conséquence $\Delta = 0$, *l'équation* (I) *représente un cylindre parabolique.*

Ceci suppose que r_{13} et r_{12} ne sont pas nuls en même temps.

Si l'on avait $r_{13} = 0$ et $r_{12} = 0$, ce qui donnerait, d'après les relations (7) § Ier,

$$\delta_{33} = 0, \quad \delta_{22} = 0$$

et réciproquement, l'équation (XIII) deviendrait

$$(\text{XIV}) \qquad X_1^2 + p_{23}x_4^2 = 0,$$

et représenterait deux plans parallèles imaginaires, si

$$\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} > 0;$$

deux plans parallèles, si

$$\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} < 0;$$

deux plans qui se confondent, si

$$\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} = 0.$$

Quatrième hypothèse.

L'équation (I) *ne renferme aucun des carrés* x_1^2, x_2^2, x^2.

18. Dans ce cas, il faut nécessairement admettre que l'équation proposée renferme au moins un des rectangles $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_2 x_3$. Nous conviendrons alors de placer au second rang de la première ligne du discriminant Δ le coefficient a_{12} du rectangle $x_1 x_2$ qu'on suppose exister dans l'équation.

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, l'équation (I) se présente sous la forme

$$(\mathrm{XV}) \qquad \begin{aligned} &2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + 2\,a_{13}\,x_1\,x_3 + 2\,a_{14}\,x_1\,x_4 + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 \\ &+ 2\,a_{24}\,x_2\,x_4 + 2\,a_{34}\,x_3\,x_4 + a_{44}\,x_4^2 = 0. \end{aligned}$$

On arrivera encore à la décomposition en carrés, en suivant la méthode indiquée par M. Moutard. On prend les dérivées du premier membre $\varphi\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ de l'équation ci-dessus par rapport aux variables x_1 et x_2, faisant partie du rectangle qui n'a pas disparu, ce qui donne

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\varphi}{dx_1} = a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + a_{14}\,x_4;$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\varphi}{dx_2} = a_{12}\,x_1 + a_{23}\,x_3 + a_{24}\,x_4;$$

puis on remarque que

$$\frac{1}{4}\,\frac{d\varphi}{dx_1}\,\frac{d\varphi}{dx_2} = \left\{ \begin{aligned} &a_{12}^2\,x_1\,x_2 + a_{12}\,a_{13}\,x_1\,x_3 + a_{12}\,a_{14}\,x_1\,x_4 \\ &+ a_{12}\,a_{23}\,x_2\,x_3 + a_{12}\,a_{24}\,x_2\,x_4 \\ &+ a_{23}\,a_{14}\,x_3\,x_4 + a_{13}\,a_{24}\,x_3\,x_4 + a_{13}\,a_{23}\,x_3^2 \\ &+ a_{14}\,a_{24}\,x_4^2 \end{aligned} \right\};$$

à cette équation on ajoute l'équation (XV), après avoir

multiplié ses deux membres par $\frac{a_{12}}{2}$, il vient

$$\frac{1}{4}\frac{d\varphi}{dx_1}\frac{d\varphi}{dx_2} - a_{13}a_{23}x_3^2 + (a_{12}a_{34} - a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24})\,x_3x_4$$
$$+ \frac{a_{12}a_{44} - 2a_{14}a_{24}}{2}\,x_4^2 = 0;$$

d'où l'on conclut, après avoir posé

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dx_2}\right),\\ X_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx_1} - \frac{d\varphi}{dx_2}\right),\end{aligned}\right.$$

$$\text{(XVI)}\quad X_1^2 - X_2^2 - 4a_{13}a_{23}x_3^2 + 4(a_{12}a_{34} - a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24})\,x_3x_4$$
$$+ 2(a_{12}a_{44} - 2a_{14}a_{24})\,x_4^2 = 0.$$

19. Supposons, en premier lieu, qu'aucun des coefficients a_{13}, a_{23} ne soit nul; on pourra alors former le carré par rapport à la variable x_3, et on trouvera

$$\text{(XVII)}\left\{\begin{aligned} &X_1^2 - X_2^2 - 4a_{13}a_{23}X_3^2\\ &+ \frac{2a_{13}a_{23}(a_{12}a_{44} - 2a_{14}a_{24}) + (a_{12}a_{34} - a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24})^2}{a_{13}a_{23}}\,x_4^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

en désignant par X_3 la fonction linéaire

$$x_3 - \frac{a_{12}a_{34} - a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}}{2a_{13}a_{23}}\,x_4.$$

Or si, dans les formules (3) et (4) (§ Ier), on introduit les hypothèses particulières

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0,$$

il vient

$$\text{(11)}\quad\left\{\begin{aligned} p_{34} &= -a_{12}^2,\\ \delta_{44} &= 2a_{12}a_{13}a_{23},\\ \delta_{33} &= -a_{12}(a_{12}a_{44} - 2a_{14}a_{24}),\\ \delta_{34} &= a_{12}(a_{12}a_{34} - a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}).\end{aligned}\right.$$

La première de ces égalités nous montre que $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ est différent de zéro et négatif; les autres nous permettent d'écrire ainsi qu'il suit l'équation (XVII) :

$$X_1^2 - X_2^2 - 4a_{13}\,a_{23}\,X_3^2 + \frac{\delta_{34}^2 - \delta_{33}\,\delta_{44}}{a_{12}^2\,a_{13}\,a_{23}}\,x_4^2 = 0,$$

ou enfin, si l'on a égard à la première des relations (5), § Ier,

$$\text{(XVIII)} \qquad X_1^2 - X_2^2 - 4a_{13}\,a_{23}\,X_3^2 + \frac{\Delta}{a_{13}\,a_{23}}\,x_4^2 = 0.$$

Or nous avons supposé que les coefficients a_{12}, a_{13}, a_{23} n'étaient pas nuls, ce qui exige, d'après la seconde des formules (11), que δ_{44} soit différent de zéro.

Discutons maintenant l'équation (XVIII).

Avec $\Delta > 0$, on aura à considérer :

1°. $a_{13}\,a_{23} > 0$,

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad +;$$

2°. $a_{13}\,a_{23} < 0$,

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad -;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à une nappe.

Avec $\Delta < 0$, on aura à considérer :

1°. $a_{13}\,a_{23} > 0$,

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad -;$$

2°. $$a_{13}\,a_{23} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+\quad-\quad+\quad+;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à deux nappes.

Avec $\Delta = 0$, on aura à considérer :

1°. $$a_{13}\,a_{23} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+\quad-\quad-;$$

2° $$a_{13}\,a_{23} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+\quad-\quad+;$$

on reconnaît le cône.

20. Admettons, en second lieu, que l'un des coefficients a_{13}, a_{23}, ou tous deux ensemble, soient nuls; on a, comme conséquence immédiate,

$$\delta_{44} = 0;$$

et, réciproquement, si $\delta_{44} = 0$, l'un ou l'autre des coefficients a_{13}, a_{23} sera nul.

Dans le cas actuel, l'équation (XVI) deviendra, si, par exemple, $a_{13} = 0$:

$$\text{(XIX)}\quad \left\{ \begin{aligned} &X_1^2 - X_2^2 + 4(a_{12}\,a_{34} - a_{14}\,a_{23})\,x_3\,x_4 \\ &\qquad + 2(a_{12}\,a_{44} - 2a_{14}\,a_{24})\,x_4^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, d'après les relations précédentes (11), on a

$$\begin{aligned} p_{34} &= -a_{12}^2, \\ \delta_{44} &= 0, \\ \delta_{34} &= a_{12}(a_{34}\,a_{12} - a_{14}\,a_{23}); \end{aligned}$$

d'où

$$a_{12}^2 \Delta = (\delta_{34})^2.$$

On voit, d'après la valeur ci-dessus, que δ_{34} n'est pas nul, si l'on n'introduit pas d'autre hypothèse que celles que nous avons admises; et, par suite, il en est de même de Δ: on remarquera, en outre, que Δ est essentiellement positif.

L'équation (XIX) représentera alors un *paraboloïde hyperbolique;* conséquence qui se trouve incluse dans les conclusions du n° 11.

Supposons enfin $\Delta = 0$; ce qui exige que δ_{34} soit nul, et réciproquement. L'équation (XIX) se réduit à

$$X_1^2 - X_2^2 + 2(a_{12} a_{44} - 2 a_{14} a_{24}) x_4^2 = 0,$$

ou, en ayant égard aux relations (11),

$$\text{(XX)} \qquad X_1^2 - X_2^2 - 2\frac{\delta_{33}}{a_{12}} x_4^2 = 0.$$

Or, dans ce cas,

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33}\, da_{44}} = -a_{12}^2 < 0;$$

on aura, par suite, à considérer

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33}\, da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} \gtrless 0,$$

ce qui donne un cylindre hyperbolique;

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33}\, da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0,$$

ce qui donne deux plans qui se coupent.

21. Cette discussion détaillée nous montre que tous les genres et toutes les espèces, dans les surfaces du second ordre, se trouvent parfaitement caractérisés dans les

tableaux suivants, qui en présenteront le résumé sous plusieurs points de vue.

Résumés.

1°. — INVARIANT $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ DIFFÉRENT DE ZÉRO.

1re FAMILLE. — Surfaces à centre unique.

Ier CAS. — *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *et le déterminant* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *tous deux positifs;* genre *ellipsoïde.*

Discriminant Δ	négatif...	Ellipsoïde réel.
	nul......	Point.
	positif...	Ellipsoïde imaginaire.

N. B. Le déterminant $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ ne peut pas être nul dans ce cas.

IIe CAS. — *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *étant différent de zéro et n'étant pas positif en même temps que le déterminant* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$; genre *hyperboloïde.*

Discriminant Δ	négatif...	Hyperboloïde à deux nappes.
	nul.....	Cône.
	positif...	Hyperboloïde à une nappe.

N. B. Le déterminant $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ peut être quelconque, positif, négatif, ou nul.

2°. — INVARIANT $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ NUL.

2e FAMILLE. — Surfaces dénuées de centre ou possédant une infinité de centres.

Ier CAS. — *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *étant nul et le discriminant* Δ *différent de zéro;* genre *paraboloïde.*

Discriminant Δ { négatif... Paraboloïde elliptique.
positif... Paraboloïde hyperbolique.

N. B. Le déterminant $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ peut être quelconque, positif, négatif, ou nul; seulement, il ne peut pas être nul en même temps que $\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}$, car il en résulterait $\Delta = 0$.

IIe CAS. — *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *et le discriminant* Δ *étant nuls;* genre *cylindrique.*

1°. *Les deux déterminants* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *et* $\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}$ *n'étant pas nuls en même temps :*

Si $$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} \gtrless 0,$$

$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0$, $\frac{d\Delta}{da_{33}} > 0$, cylindre elliptique imaginaire;

$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0$, $\frac{d\Delta}{da_{33}} < 0$, cylindre elliptique :

$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0$, $\frac{d\Delta}{da_{33}} \gtrless 0$, cylindre hyperbolique;

$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0$, $\frac{d\Delta}{da_{33}} = 0$, deux plans imaginaires qui se coupent ou une droite;

$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0$, $\frac{d\Delta}{da_{33}} = 0$, deux plans qui se coupent.

Si $\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0$ et $\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} \gtrless 0$,

$\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0$, $\dfrac{d\Delta}{da_{22}} > 0$, cylindre elliptique imaginaire ;

$\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0$, $\dfrac{d\Delta}{da_{22}} < 0$, cylindre elliptique ;

$\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0$, $\dfrac{d\Delta}{da_{22}} \gtrless 0$, cylindre hyperbolique ;

$\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0$, $\dfrac{d\Delta}{da_{22}} = 0$, deux plans imaginaires qui se coupent ou *une droite ;*

$\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0$, $\dfrac{d\Delta}{da_{22}} = 0$, deux plans qui se coupent.

II°. *Les deux déterminants* $\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ et $\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}$ *étant nuls en même temps :*

1°. Si $\dfrac{d\Delta}{da_{33}}$ et $\dfrac{d\Delta}{da_{22}}$ ne sont pas nuls à la fois, on a un cylindre parabolique ;

2°. Si $\dfrac{d\Delta}{da_{33}} = 0$ et $\dfrac{d\Delta}{da_{22}} = 0$,

$\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} > 0$, on a deux plans parallèles imaginaires;

$\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} < 0$, on a deux plans parallèles;

$\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} = 0$, on a deux plans qui se confondent.

N. B. Les hypothèses $\dfrac{d\Delta}{da_{44}} = 0$, $\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0$, $\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} = 0$ entraînent, comme conséquence, $\Delta = 0$; mais il n'y a pas réciprocité.

22. On pourra résumer ainsi les signes caractéristiques des différents genres de surfaces :

Genre ellipsoïde. L'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ et le déterminant $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ sont tous deux positifs ; $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ n'est jamais nul.

Genre hyperboloïde. L'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ est différent de zéro et n'est pas positif en même temps que le déterminant $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$, qui d'ailleurs peut être nul.

Genre paraboloïde. L'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ est nul, et le discriminant Δ est différent de zéro ; $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ peut être nul.

Genre cylindrique. L'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ et le discriminant Δ sont tous deux nuls.

23. On peut encore dire, si l'on convient de regarder l'ellipsoïde imaginaire, comme une surface réglée :

Discriminant négatif. Surfaces réelles dénuées de génératrices rectilignes.

Discriminant positif. Surfaces réglées gauches.

Discriminant nul. Surfaces réglées développables

24. Nous achèverons cette discussion en énonçant les conditions déterminantes des surfaces particulières du second degré.

Pour que l'équation générale du second degré représente :

Un cône, il faut et il suffit que

$$\Delta = 0;$$

un paraboloïde, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \text{et} \quad \Delta \gtrless 0;$$

un cylindre elliptique ou hyperbolique, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \Delta = 0;$$

un cylindre parabolique, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} = 0:$$

deux plans qui se coupent, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \Delta = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{d\Delta}{da_{33}} = 0, & \text{si} & \dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} \gtrless 0, \\ \dfrac{d\Delta}{da_{22}} = 0, & \text{si} & \dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0; \end{array} \right.$$

deux plans parallèles, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0,$$

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} = 0.$$

Note. Le théorème sur des normales inséré (t. XVI, p. 464) est consigné dans un Mémoire de M. Liouville et inséré dans son journal (t. VI, p. 403). (DEWULF.)

SOLUTION DES QUESTIONS 401 ET 402

(voir t. XVI, p. 401);

PAR M. DEWULF.

Équation générale des développées en coordonnées linéaires (*voir* Note à la fin).

Soient

$$f(x,y)=0,$$

$$Y-y=\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}(X-x),$$

les équations d'une courbe de degré n et de sa normale en un point (x,y).

Les coordonnées *linéaires* de la normale sont (*Nouvelles Annales*, t. VII, p. 10)

$$(2)\qquad q=\frac{\frac{df}{dx}}{y\frac{df}{dx}-x\frac{df}{dy}},\qquad p=\frac{-\frac{df}{dy}}{y\frac{df}{dx}-x\frac{df}{dy}},$$

Ces deux dernières équations donnent

$$(3)\qquad px+qy=1.$$

En éliminant x en y entre les équations (1), (2), (3), nous aurons une équation entre p et q, qui sera l'équation de la développée de la courbe (1) en coordonnées linéaires. D'après le théorème de Bezout, cette équation sera de degré n^2. Donc la développée d'une courbe de degré n est de la classe n^2 (*).

(*) L'ordre est $3n(n-1)$. TM.

Ceci démontre un théorème de Steiner énoncé t. XIV, p. 233.

Pour l'ellipse

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1,$$

les calculs précédemment indiqués donnent l'équation

$$\frac{A^2}{p^2}+\frac{B^2}{q^2}=C^4,$$

et pour l'hyperbole

$$\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1,$$

l'équation

$$\frac{A^2}{p^2}-\frac{B^2}{q^2}=C^4;$$

ici $C^2=A^2+B^2$.

Solution de la question 401.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation de l'ellipse donnée. La droite dont on cherche l'enveloppe a pour coordonnées linéaires

$$p=\frac{1}{x},\quad q=\frac{1}{y}.$$

Eliminant x et y entre ces trois équations, nous aurons l'équation cherchée de l'enveloppe, c'est

$$\frac{1}{a^2p^2}+\frac{1}{b^2q^2}=1.$$

Cette équation représente évidemment le développement

d'une ellipse dont les axes sont

$$A = b\frac{ab}{a^2 - b^2},$$

$$B = a\frac{ab}{a^2 - b^2}.$$

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'hyperbole donnée, l'enveloppe cherchée aura pour équation

$$\frac{1}{a^2p^2} - \frac{1}{b^2q^2} = 1,$$

qui représente la développée d'une hyperbole dont les axes sont

$$A = \frac{ab}{a^2 + b^2}a\sqrt{-1}, \qquad B = \frac{ab}{a^2 + b^2}b.$$

On trouve avec la même facilité l'équation des coordonnées linéaires de la surface enveloppe de la question 402.

Une surface peut être représentée par le système de deux équations

(1) $\quad f(p, q, r) = 0, \quad$ ou $\quad pX + qY + rZ = 1; \quad$ (2)

p, q, r étant des coordonnées linéaires, l'équation (1) suffit seule à représenter une surface.

L'équation du plan dont on cherche l'enveloppe en coordonnées ordinaires est évidemment

$$\frac{X}{2x} + \frac{Y}{2y} + \frac{Z}{2z} = 1,$$

x, y, z étant les coordonnées du point qu'on projette sur

les trois plans coordonnés. Nous avons donc

$$p = \frac{1}{2x}, \quad q = \frac{1}{2y}, \quad r = \frac{1}{2z}.$$

Si le point x, y, z appartient à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'élimination de x, y, z entre les quatre dernières équations nous donnera l'équation de la surface enveloppe

$$\frac{1}{a^2 p^2} + \frac{1}{b^2 q^2} + \frac{1}{c^2 r^2} = 4.$$

Il est facile de passer au cas des hyperboloïdes.

MM. Sacchi (Joseph), de Milan, et Mendès, élève du lycée Saint-Louis, résolvent la question 401 directement. MM. Laquière (Marius) et Carenou, élèves du même lycée, font observer que si l'on projette chaque point d'une parabole sur l'axe et sur la tangente qui passe par le sommet, l'enveloppe de la droite qui réunit les deux projections est une parabole du second degré.

M. J.-Ch. Dupain, professeur, ramène le problème à une question de dioptrique.

Note du Rédacteur. Soient

(1) $$py + qx = 1$$

l'équation d'une droite;

$$f(p, q) = 0,$$

une relation donnée entre p et q: on trouve pour enveloppe de la droite (1), par le procédé connu,

$$\varphi(p, q) = 0,$$

où φ est une fonction connue; $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$ sont les *coordonnées linéaires* de la courbe enveloppe, dénomination introduite par M. Plücker, qui nomme coordonnées par *points* (punk-coordinaten), le système cartésien par *points*; il est évident qu'on peut passer d'un système à l'autre. Nous avons jugé nécessaire de rappeler ce qu'on lit *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 10.

SOLUTION DE LA QUESTION 451

(voir page 360);

PAR M. A. TERQUEM,
Élève au lycée Saint-Louis.

Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales.

Démonstration. Soit l'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

celle de l'hyperbole équilatère homofocale est

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Les équations des tangentes perpendiculaires seront de la forme

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

et

$$y = -\frac{x}{m} \pm \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2}.$$

Je cherche l'intersection de la première tangente avec l'hyperbole ; les abscisses sont données par l'équation du second degré suivante :

$$(1 - m^2)x^2 \pm 2m\sqrt{a^2m^2 + b^2}\,x - \frac{a^2(2m^2+1)+b^2}{2} = 0.$$

La différence des racines se trouve immédiatement

$$x' - x'' = 2\sqrt{\frac{2m^2(a^2m^2+b^2)+(1+m^2)[a^2(2m^2+1)+b^2]}{2(1-m^2)^2}};$$

ou, en réduisant et élevant au carré,

$$(x' - x'')^2 = \frac{2(1+m^2)(a^2+b^2)}{(1-m^2)^2}.$$

La différence du carré des ordonnées s'obtient aussi immédiatement en substituant les valeurs de x' et de x'' dans l'équation de la tangente

$$y' - y'' = m(x' - x'').$$

En désignant par l la longueur de la corde, on aura

$$l^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = \frac{2(1+m^2)^2(a^2+b^2)}{(1-m^2)}.$$

Cette valeur de l^2 ne variera pas si on remplace m par $-\frac{1}{m}$; donc les deux cordes sont égales. C. Q. F. D.

Note. La longueur de la corde varie avec la fraction $\frac{1+m^2}{1-m^2}$; en remplaçant m par tang α, on trouve

$$\frac{1+\text{tang}^2\alpha}{1-\text{tang}^2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha.$$

Le maximum est pour $2\alpha = 90^\circ$ ou $\alpha = 45^\circ$; la tangente est parallèle à l'asymptote ; le minimum pour $2\alpha = 180$, la tangente est perpendiculaire à l'axe de l'hyperbole.

QUESTIONS.

452.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots < n\left[1-\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right].$$

(SCHLÖMILCH.)

453.

$$l.n+1 < \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots < 1+l.n+1,$$

l = log népérien.

(SCHLÖMILCH.)

454. Dans une courbe plane du troisième degré, les trois sommets du triangle des asymptotes et les trois sommets du triangle des tangentes aux points d'inflexion sont sur une même conique. (FAURE.)

455. Par une droite donnée par ses deux projections, mener un plan tel, que ses deux traces ne forment qu'une seule et même droite. (Solution graphique.)

456. Dans un plan donné par ses deux traces, mener une droite telle, que ses deux projections ne forment qu'une seule et même droite. (Solution graphique.)

457.

$$\frac{4}{\pi}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2+\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2+\ldots.$$

(CATALAN.)

458.

$$\lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=l.2\ (\text{pour } n \text{ infini}).$$

(CATALAN.)

NOTE SUR LE THÉORÈME FOCAL
Démontré p. 179 (question 413);

PAR M. DEWULF.

Ce théorème est un cas particulier du théorème général (IX) de M. Laguerre-Verly (tome XII, page 63). Il nous semble utile de rappeler ce théorème :

Soit $\varphi = 0$ *l'équation d'une conique, axes rectangulaires, et* $(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = 0$ *l'équation d'un* cercle-point *et aussi du système de deux droites imaginaires passant par le point réel* (α, β). *La conique et le cercle se coupent en quatre points imaginaires, donnant lieu à deux droites réelles; soient* $X = 0$, $Y = 0$ *les équations de ces deux droites réelles.*

M. Laguerre-Verly les nomme *directrices* relativement au point (α, β); l'équation $(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \lambda XY$, où λ est une constante arbitraire, représente le faisceau de coniques qui passent par les quatre points imaginaires, et par conséquent aussi la conique $\varphi = 0$; et l'on en conclut que le carré de la distance d'un point quelconque de la conique au point (α, β), divisé par le produit des distances de ce point de la conique aux deux directrices, donne un quotient constant λ : c'est le théorème VIII. Ensuite, à l'aide de considérations homographiques, M. Laguerre-Verly établit le théorème :

Soit F *un point fixe pris dans le plan d'une conique,* A *et* A′ *deux points fixes sur cette conique; un angle dont les côtés passent constamment par ces points et dont le sommet se meut sur la conique, intercepte, sur*

une des droites directrices correspondantes au point F, *un segment vu de ce point* F *sous un angle constant.*

Et l'auteur énonce aussi le cas où F est un foyer, et celui où la corde AA′ passe par le point F.

Note du Rédacteur. Nous saisissons avec empressement cette occasion de rapporter l'attention sur un des plus beaux travaux qu'on ait faits sur les coniques, travail fondé sur une conception neuve, sur une idée créatrice, chose si rare. Le profond penseur avait promis une suite : c'était en 1853. Nous sommes en 1858.

NOTE SUR LES DEUX THÉORÈMES D'APOLLONIUS
Relatifs aux diamètres conjugués des coniques ;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Professeur.

Soit l'équation polaire d'une ellipse

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega},$$

le pôle est au centre et l'axe focal est l'axe polaire ; ρ est un demi-diamètre. Désignant par θ l'angle que fait ρ avec son *conjugué,* on a

$$\tang \theta = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\theta},$$

(1) $$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2},$$

on a

$$\rho^{-2} = \frac{\sin^2 \omega}{b^2} + \frac{\cos^2 \omega}{a^2},$$

d'où

$$(2)\qquad -\left(\rho^{-2}-\frac{1}{a^2}\right)=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\sin^2\omega,$$

$$(3)\qquad \rho^{-2}-\frac{1}{b^2}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos^2\omega.$$

Le carré de la dérivée de l'équation (2) est

$$\frac{\rho'^2}{\rho^6}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\sin^2\omega\cos^2\omega=-\left(\rho^{-2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\rho^{-2}-\frac{1}{b^2}\right),$$

ou

$$\rho^4-\rho^2(a^2+b^2)+a^2b^2\left(1+\frac{\rho'^2}{\rho^2}\right)=0,$$

et d'après l'équation (1)

$$(4)\qquad \rho^4-\rho^2(a^2+b^2)+\frac{a^2b^2}{\sin^2\theta}=0.$$

Désignant par a'^2 et b'^2 les carrés des demi-diamètres conjugués qui font entre eux l'angle θ, on a donc, en vertu de cette équation,

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,$$

$$a'b'=\frac{ab}{\sin\theta};$$

ce sont les deux théorèmes d'Apollonius.

La correspondance du maximum de θ à l'égalité des diamètres conjugués devient intuitive d'après l'équation (4), qui est d'ailleurs très-propre à fournir la limite de θ.

SEGMENT SPHÉRIQUE A UNE BASE;

PAR UN ANONYME.

M. Mas Saint-Gueral, professeur au collége de Toulon, a indiqué la solution suivante de la question d'examen pour l'admissibilité à l'École Navale, citée dans le numéro du mois d'août; *cette solution n'exige pas la connaissance de l'expression du volume de la sphère dont alors on peut la déduire.*

1°. Il est évident que si l'on prend un segment à deux bases, le centre étant situé d'un même côté des deux bases, le volume de ce segment est compris entre les volumes des deux cylindres de même hauteur que ce segment, et ayant pour base, l'un la plus grande base, l'autre la plus petite.

2°. Nous admettons aussi que pour $h = 0$ le volume d'une calotte sphérique à une base est nul, par conséquent on doit avoir simplement pour cette calotte

$$V = Ah^3 + Bh^2 + Ch.$$

Soit

$$V' = Ah'^3 + Bh'^3 + Ch'$$

une seconde calotte à une base et telle, que le centre ne tombe pas entre les bases de ces deux calottes, ce qui peut avoir lieu en prenant $h - h'$ suffisamment petit. h étant supposé $> h'$, on aura pour le segment à deux bases qui est leur différence

$$V'' = (h - h')[A(h^2 + hh' + h'^2) + B(h + h') + C].$$

Les cylindres dont il est question dans la première re-

marque ont pour expression respective

$$\pi h'(2r - h')(h - h'), \quad \pi h(2r - h)(h - h');$$

par suite on a, en supprimant le facteur positif $h - h'$, les inégalités suivantes :

$$\pi h'(2r - h') < A(h^2 + hh' + h'^2)$$
$$+ B(h + h') + C < \pi h(2r - h),$$

pour toutes les valeurs de h' comprises entre o et h, h étant lui-même compris entre o et $2r$. Or pour $h' = h$, les limites extrêmes deviennent égales ; on a donc pour cette hypothèse

$$3Ah^2 + 2Bh + C = 2\pi rh - \pi h^2,$$

ce qui donne les équations de condition

$$A = -\frac{\pi}{3}, \quad B = \pi r, \quad C = 0,$$

qui sont les valeurs demandées.

Remarque. Il n'est nullement nécessaire de supposer la fonction du troisième degré, mais seulement supérieure au second degré, car si l'on pose

$$V = Ah^m + Bh^{m-1} + \ldots + Mh^4 + Nh^3 + Ph^2 + Qh,$$

on trouve par la même analyse.

$$A = 0, \quad B = 0, \ldots, \quad M = 0, \quad N = -\frac{\pi}{3}, \quad P = \pi r, \quad Q = 0.$$

NOTE

Sur l'équation au carré des différences des racines d'une équation du degré n ;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Posons l'équation

$$(a, b, c, d, e, \ldots,) (x, 1)^n = 0,.$$

et désignons par s_0, s_1, $s_2, \ldots$, les sommes des puissances zéro, première,..., de ses racines x_1, $x_2, \ldots$, x_n. Maintenant soit $\sum_p$ la somme de la puissance p des racines de l'équation au carré des différences des racines de l'équation donnée; je vais montrer que $\sum_p$ a pour valeur l'invariant quadratique de la forme

$$(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2p}) (x, y)^{2p}.$$

D'abord, on a

$$\sum_p = (n-1) s_{2p} - 2p \sum x_1^{2p-1} x_2 + \frac{2p(2p-1)}{1.2} \sum x_1^{2p-2} x_2^2$$

$$+ (-1)^p \frac{2p(2p-1)(2p-2)\ldots(p+1)}{1\ 2.3\ldots p} \sum x_1^p x_2^p.$$

Mais

$$\sum x_1^{2p-1} x_2 = s_{2p-1} s_1 - s_{2p},$$

$$\sum x_1^{2p-2} x_2^2 = s_{2p-2} s_2 - s_{2p},$$

$$\sum x_1^p x_2^p = \frac{1}{2} (s_p^2 - s_{2p});$$

en sorte que nous tirons (en se rappelant que $n = s_0$),

$$\sum_p = s_0 s_{2p} - 2p\, s_{2p-1} s_1 + \frac{2p.(2p-1)}{1.2} s_{2p-2} s_2$$
$$+ (-1)^p \frac{(2p-1)(2p-2)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots(p-1)} s_p^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Note.

$$(a, b, c, d, e, \ldots,)(x, 1)^n = ax^n + nbx^{n-}$$
$$+ \frac{n.n-1}{2} cx^{n-2} + \frac{n.n-1.4-2.n-3}{1\ 2.3} dx^{4-3} + \ldots;$$

$$(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2p})(x, y)^{2p}$$
$$= s_0 x^{2p} + 2ps_1 x^{2p-1} y + \frac{2p.2p-1}{1.2} s_2 x^{2p-2} y^2.$$

THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES COURBES PLANES ET SUR LES SURFACES.

1. *Notations.* Sur une droite A′, prenons n points, et d'un point O pris hors de cette droite, menons n rayons à ces points. Ces rayons pris deux à deux donnent $\frac{n(n-1)}{2}$ angles; designons le produit des $\frac{n(n-1)}{2}$ sinus de ces angles par A'_p.

2. Théorème. *Soit donné dans un même plan ce système de* n *droites* A′, A″,..., A⁽ⁿ⁾ *traversé par un second système de* n *droites* B′, B″,..., B⁽ⁿ⁾; *chacune de ces* 2n *droites contient* n *points d'intersection; menons d'un point* O *des rayons aux* n^2 *points d'intersection;*

les n *points d'intersection situés sur la droite* A′ *donnent* A'_p; *sur la droite* A″, *le produit* A''_p; *posons*

$$A'_p,\ A''_p,\ A'''_p,\ldots,\ A^{(n)}_p = \alpha;$$

de sorte que α *est le produit de* $\frac{n^2(n-1)}{2}$ *sinus; désignons par* β *le produit analogue pour* β; *si* $\frac{\alpha}{\beta}$ *est un quotient constant, le lieu du point* O *est une ligne d'ordre* n *et passant par les* n² *points d'intersection.*

Démonstration. Soient r_1, r_2, deux rayons interceptant le segment s, et h la hauteur du triangle ayant pour côtés r_1, r_2, s; on a

$$\sin r_1, r_2 = \frac{hs}{r_1, r_2}:$$

remplaçant chaque sinus par une telle valeur, on retombe sur le théorème des *distances* (p. 368).

Observation. Faisant

$$n = 2,$$

on a la propriété vulgaire des coniques relative au rapport *projectif* de M. Poncelet; *bi-multiple* de M. Steiner; *anharmonique* de M. Chasles.

.3. Soit un système de n plans A′, A″,..., $A^{(n)}$ et un second système de n plans B′, B″,..., $B^{(n)}$; ils se coupent suivant n^2 droites par lesquelles passent une infinité de surfaces d'ordre n (page 368); ôtons les plans A′, B′, il reste deux systèmes, chacun de $n-1$ droites, et par les $(n-1)^2$ droites d'intersection passent une infinité de surfaces d'ordre $n-1$. Une surface d'ordre n coupe une surface de l'ordre $n-1$ suivant une ligne d'ordre $n(n-1)$: or ces surfaces ont en commun $(n-1)^2$ droites; donc elles ont encore en commun une ligne

d'ordre $n - 1$. Or, je dis que cette ligne est plane et que son plan passe par l'intersection des plans A', B'. En effet, soit O un point de cette ligne; le produit des n distances de ce point aux n plans $A', A'', \ldots, A^{(n)}$ divisé par le produit des distances du même point aux n plans $B', \ldots, B^{(n)}$ est un quotient constant quel que soit le point O pris sur la courbe; de même, le produit des $n - 1$ distances du point O aux $n - 1$ plans $A'', \ldots, A^{(n)}$ divisé par le produit des distances aux $n - 1$ plans $B'', B''', \ldots, B^{(n)}$; donc la distance du point O au plan A', divisée par la distance au plan B', donne un quotient constant : ainsi le lieu du point O est dans un plan passant par l'intersection de A' et B'. C. Q. F. D.

4. Si A et B représentent des droites situées dans le même plan, on obtient une propriété analogue pour les courbes planes.

5. Si les A et les B représentent des surfaces, les droites d'intersection sont remplacées par des courbes d'intersections, qui présentent encore des propriétés analogues à celles qui sont énoncées ci-dessus pour les droites.

THÉORÈMES DIVERS ET PROBLÈMES SUR LES COURBES PLANES;

DE M. J. STEINER (*).

---

1. *Notation.* Soient une courbe plane C^n de degré n et F un point fixe dans le plan de la courbe; si un faisceau de droites passe par le point fixe F, chaque rayon du fais-

---

(*) *Bulletin mensuel de l'Académie de Berlin*, juillet 1858, p. 419-443.

ceau coupe la courbe en n points. Pour un rayon quelconque, soit p le produit des distances des n points d'intersection au point F.

THÉORÈME I. *Les rayons se partagent en général en groupes de* 2 n *droites où dans chaque groupe les produits* p *sont égaux. Entre ces* 2 n *droites, il y en a* n *où le produit* p *présente un* minimum *relatif. Ce minimum devient autant de fois un maximum que la courbe a de couples d'asymptotes imaginaires.*

2. THÉORÈME II. *Si on prend sur chaque rayon un point* q *tel, que sa distance au point fixe* F *étant élevée à la puissance* n *soit égale au produit* p, *le lieu de ce point est une courbe* Q^{2n} *de degré* 2 n, *qui a* n *doubles asymptotes qui passent par le point* F; *ce faisceau d'asymptotes rencontre la courbe* C^n *en* 2 n (n — 1) *points; dans chacun de ces rayons-asymptotes, le point* q *coïncide avec un des* 2 n (n — 1) *points d'intersection. Ainsi il passe par le point* F, 2 n (n — 1) *rayons tels, que pour chacun un certain segment est moyenne* géométrique *entre les* n — 1 *autres segments. Le point* q *devant être porté de part et d'autre du point* F, *il s'ensuit que* F *est le centre de la courbe* Q^{2n} *et un point singulier multiple.*

3. THÉORÈME III. *Dans les* n *droites où le produit* p *est un minimum relatif, la distance du point* q *au point* F *est aussi un minimum, de sorte que ces droites sont, au point* q, *normales à la courbe* Q^{2n}.

4. Applications aux coniques. En faisant $n = 2$, les $2n$ droites du théorème I se réduisent dans l'ellipse à deux réelles, qui sont parallèles à deux diamètres égaux; les deux autres sont imaginaires; comme il y a un couple d'asymptotes imaginaires, il y a une droite qui est un maximum; c'est la parallèle à l'axe focal. Dans l'hyper-

bole, il y a quatre transversales parallèles aux quatre diamètres égaux; deux de ces diamètres appartiennent à l'hyperbole conjuguée.

5. THÉORÈME. IV. *Par un point fixe* F, *situé dans le plan d'une conique, on mène trois transversales quelconques; sur les trois cordes comme diamètres, on décrit des* cercles. *Le point* radical *de ces cercles est fixe.*

Si le point F est à l'infini, le théorème devient évident.

6. THÉORÈME V. *Une droite de longueur constante, qui se meut entre deux courbes planes d'ordre* p *et* q, *enveloppe une courbe de classe* 4 pq *et a à l'infini une tangente de contact* 2 pq.

7. THÉORÈME VI. *Une droite de longueur constante, qui se meut dans une courbe de degré* C^n, *de degré* n, *enveloppe une courbe de la classe* 2 n (n—1); *il y a* n (n—1); *cordes de direction donnée; l'enveloppe touche les* n *asymptotes de la courbe* C^n *à l'infini dans un contact de quatre points; les milieux des cordes parallèles sont sur une ligne de degré* n — 1 (*).

8. Soit la courbe C^4; et l'enveloppe de la corde constante est de vingt-quatrième classe; cette enveloppe et la courbe C^4 ont $12 . 24 = 288$ tangentes en commun, parmi lesquelles sont les quatre asymptotes, qui comptent chacune pour quatre tangentes; de sorte qu'il reste $288 - 16 = 272$ tangentes communes. Soient S une de ces 272 tangentes, α le point de contact avec la courbe C^4, et β, γ les points d'intersection de cette tangente avec la courbe C^4. Si β et γ sont du même côté de α, alors $\beta\gamma$ est égale à la corde constante; si α est entre β et γ, c'est $\alpha\beta$ ou $\alpha\gamma$, qui

(*) Il serait commode d'adopter les expressions contact *biponctuel, triponctuel, quadriponctuel, etc.;* de même pour le *point multiple.* TM.

est égale à la courbe constante; dans ce dernier cas, les deux courbes se touchent en α, et S compte pour deux tangentes communes.

9. Soit la courbe C^3; l'enveloppe est de la douzième classe et a avec la courbe C^3, en commun $6.12 = 72$ tangentes, parmi lesquelles les trois asymptotes de la courbe C^3 comptent pour $3.4 = 12$ tangentes, de sorte qu'il reste $72 - 12 = 60$ tangentes non asymptotes. Soient S une de ces 60 tangentes, α le point de contact, et β le point d'intersection. Les deux courbes se touchent en α, et $\alpha\beta$ est égale à la corde de longueur constante; de sorte que chaque tangente compte pour deux; il n'y a donc que 30 tangentes communes distinctes et l'on obtient les théorèmes suivants :

10. Théorème VII. *Dans toute courbe de troisième degré, il y a* 30 *tangentes pour chacune desquelles la distance du point de contact au point d'intersection est de même longueur.*

Lorsque cette distance est nulle, on a les 30 points d'inflexion dont trois seulement sont visibles.

11. Théorème VIII. *Dans une courbe* C^3, *on ne peut mener que* 60 *transversales coupant la courbe en trois points* α, β, γ, *tellement que* $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ *soient de longueurs données.*

12. Théorème. IX. *Courbe* C^2; *l'enveloppe de la corde constante est de la quatrième classe; par un point fixe on ne peut mener que quatre cordes égales; les* quatre *milieux de ces cordes sont sur un même cercle, dont le centre est indépendant de la longueur de la corde, et si* C^2 *représente deux* droites, *l'enveloppe est une courbe parallèle à une* hypocycloïde.

La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 446

(voir page 358) ;

PAR M. CHALLIOT,
Élève du lycée de Versailles.

Joignons par une droite les centres des cercles inscrit et circonscrit à un triangle ; cette droite rencontre le cercle inscrit en deux points ; soient s et s' les puissances de ces points relativement au cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, R le rayon du cercle circonscrit, on a la relation

$$ss' = r^3 (4R + r).$$

(GRUNERT.)

(On admet comme connu le théorème que : *La distance des cercles inscrit et circonscrit à un triangle est moyenne proportionnelle entre le rayon du cercle circonscrit et l'excès de ce rayon sur le diamètre du cercle inscrit.*) En sorte que sur la figure, on a

$$\overline{OO'}^2 = d^2 = R(R - 2r).$$

(*Voir* t. IX, p. 216.)

Cela posé, on a *par définition*

$$s = EF \times EF',$$
$$s' = E'F \times E'F'$$

Multipliant membre à membre, il vient

$$ss' = (EF \times E'F) \times (EF' \times E'F').$$

Si des points F, F′ on mène les tangentes FG, F′G′ au cercle inscrit, il vient

$$ss' = \overline{FG}^2 \times \overline{F'G'}^2.$$

Or

$$\overline{FG}^2 = (R - d)^2 - r^2,$$
$$\overline{F'G'}^2 = (R + d)^2 - r^2,$$

et puisque

$$d = \sqrt{R(R - 2r)},$$

il vient enfin

$$ss' = \left[(R - \sqrt{R^2 - 2Rr})^2 - r^2\right]\left[(R + \sqrt{R^2 - 2Rr})^2 - r^2\right].$$

Si l'on développe et que l'on effectue la multiplication indiquée, il vient, après la réduction des termes semblables,

$$ss' = r^3(4R + r).$$

C. Q. F. D.

Note. MM. Saintard (de Magny), E. Descourbes, Léon Brault (institution Barbet) ont aussi résolu ce problème, et le dernier a résolu aussi le problème 451.

NOTE

Sur les équations de condition qui définissent un système de points;

PAR M. BOURGET,
Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont.

---

1. Dans les Traités de Mécanique, on définit un système de points par l'ensemble des équations

$$(A) \qquad L = 0, \quad M = 0, \ldots$$

qui lient entre elles leurs coordonnées $x, y, z; x', y', z'$, etc.

Certaines propriétés générales du mouvement exigent la condition spéciale de la *liberté* du système. Quels caractères doivent présenter les équations (1) pour que le système soit libre? C'est une question qui n'est pas résolue dans les ouvrages classiques, et sur laquelle je veux dire quelques mots dans cette Note.

2. J'appellerai *système libre* un système tel, qu'en le supposant à un instant quelconque invariable de figure par la solidification, on puisse lui donner un déplacement quelconque.

Or, un déplacement quelconque peut être produit par une translation unie à une rotation. D'autre part, une translation peut être considérée comme le déplacement résultant de trois mouvements parallèles aux axes, et la rotation autour d'un axe peut être regardée comme venant de la composition de trois rotations autour des mêmes lignes.

Donc nous pouvons dire qu'un système est *libre*, si, en le supposant solidifié à un instant quelconque, on peut lui

donner trois translations arbitraires parallèlement aux axes, et trois rotations arbitraires autour des mêmes droites.

3. D'après ce qui précède, chacune des équations (A) doit être satisfaite identiquement à une époque quelconque, lorsqu'à la place de

$$x,\quad x',\quad x'',\ldots,$$

on met

$$x+a,\quad x'+a,\quad x''+a,\ldots,$$

a étant une translation commune à tous les points parallèlement à Ox si le système est libre. Donc, dans cette hypothèse, on doit avoir l'identité

$$0=\frac{dL}{dx}+\frac{dL}{dx'}+\frac{dL}{dx''}+\ldots=\sum\frac{dL}{dx},$$

et aussi les deux suivantes :

$$0=\frac{dL}{dy}+\frac{dL}{dy'}+\frac{dL}{dy''}+\ldots=\sum\frac{dL}{dy},$$

$$0=\frac{dL}{dz}+\frac{dL}{dz'}+\frac{dL}{dz''}+\ldots=\sum\frac{dL}{dz}.$$

4. Donnons à présent une rotation α autour de Ox; y et z varient seuls, et si nous nommons r la projection de OA sur le plan yOz, φ l'angle de cette ligne avec Oy, nous avons

$$y=r\cos\varphi,\quad z=r\sin\varphi.$$

Donc la rotation α fera varier y et z de quantités δz, δy données par les équations (*)

$$\delta y=-z.\alpha,\quad \delta z=y.\alpha.$$

(*) Car

$$\delta y=-r\sin\varphi\, d\varphi=-zd\varphi,$$
$$\delta z=r\cos\varphi\, d\varphi=yd\varphi.$$

TM.

Donc, si le système est libre, l'équation $L = 0$ sera identiquement satisfaite, quand à la place de

$$y,\ z,\quad y',\ z',\quad y'',\ z'',\ldots,$$

nous mettrons

$$y - z\alpha,\ z + y\alpha,\quad y' - z'\alpha,\ z' + y'\alpha,$$
$$y'' - z''\alpha,\ z'' + y''\alpha,\ldots;$$

ainsi donc nous devrons avoir l'identité

$$0 = \sum \left(y\frac{dL}{dz} - z\frac{dL}{dy}\right),$$

et de même les suivantes :

$$0 = \sum \left(z\frac{dL}{dx} - x\frac{dL}{dz}\right),$$
$$0 = \sum \left(x\frac{dL}{dy} - y\frac{dL}{dx}\right).$$

5. En résumé, la liberté du système, telle que nous l'avons définie, est caractérisée par les six équations suivantes, qui doivent être des identités :

$$(\mathrm{B})\quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum \frac{dL}{dx}, \\ 0 &= \sum \frac{dL}{dy}, \\ 0 &= \sum \frac{dL}{dz}, \\ 0 &= \sum \left(y\frac{dL}{dz} - z\frac{dL}{dy}\right), \\ 0 &= \sum \left(z\frac{dL}{dx} - x\frac{dL}{dz}\right), \\ 0 &= \sum \left(x\frac{dL}{dy} - y\frac{dL}{dx}\right), \end{aligned} \right.$$

pour l'équation

$$L = o,$$

et par six identités semblables pour chacune des autres équations

$$M = o, \quad N = o, \ldots.$$

6. A l'aide des relations précédentes, on voit découler naturellement les principes généraux des équations fondamentales de la dynamique

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \dfrac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \dfrac{dL}{dx} + \mu \dfrac{dM}{dx} + \ldots, \\ m \dfrac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \dfrac{dL}{dy} + \mu \dfrac{dM}{dy} + \ldots, \\ m \dfrac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda \dfrac{dL}{dz} + \mu \dfrac{dM}{dz} + \ldots, \\ m \dfrac{d^2 x'}{dt^2} = X' + \lambda \dfrac{dL}{dx'} + \mu \dfrac{dM}{dx'} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

que l'on déduit du principe de d'Alembert combiné avec celui des vitesses virtuelles, ou que l'on démontre directement ainsi que M. Poinsot l'a fait dans une note placée à la fin de son admirable *Statique*.

1°. Ajoutons membre à membre les équations relatives aux coordonnées de même nom, il vient

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X + \lambda \sum \frac{dL}{dx} + \mu \sum \frac{dM}{dx} + \ldots,$$

$$\sum m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum Y + \lambda \sum \frac{dL}{dy} + \mu \sum \frac{dM}{dy} + \ldots,$$

$$\sum m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum Z + \lambda \sum \frac{dL}{dz} + \mu \sum \frac{dM}{dz} + \ldots;$$

mais en nommant

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1$$

les coordonnées du centre de gravité, M la somme des masses, et en admettant que le système soit libre, ces équations conduisent à

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\sum X,$$

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\sum Y,$$

$$M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\sum Z.$$

C'est de là que l'on déduit le principe du mouvement du centre de gravité.

On voit qu'il a lieu pour un système libre; mais on voit qu'il est encore vrai pour un système qui ne serait qu'imparfaitement libre, c'est-à-dire qui ne satisferait qu'aux équations de translation

$$o=\sum\frac{dL}{dx},\quad o=\frac{dL}{dy},\quad o=\frac{dL}{dz}.$$

2°. Multiplions les équations (C) respectivement par

$$2dx,\quad 2dy,\quad 2dz,\quad 2dx',\ldots,$$

ajoutons, il viendra

$$\frac{1}{2}d\sum m\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)$$
$$=\sum(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)-\lambda\frac{dL}{dt}dt-\ldots,$$

car

$$o=\frac{dL}{dt}dt+\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\ldots,$$
$$o=\frac{dM}{dt}dt+\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où l'on voit que si L, M, etc., ne contiennent pas le temps explicitement, on obtient

$$\frac{1}{2}\, d\sum mv^2 = \sum (\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dz + \mathrm{Z}\,dz),$$

d'où

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = \sum \int (\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz).$$

C'est l'équation des forces vives. On voit qu'elle a lieu pour tout système libre ou non libre, pourvu que les équations de conditions (A) ne contiennent pas le temps explicitement.

3°. Des équations fondamentales (C) nous tirons encore par une combinaison connue :

$$\sum m\left(y\frac{d^2 z}{dt^2} - z\frac{d^2 y}{dt^2}\right)$$

$$= \sum (y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) + \lambda \sum \left(y\frac{d\mathrm{L}}{dz} - z\frac{d\mathrm{L}}{dy}\right) + \ldots,$$

$$\sum m\left(z\frac{d^2 x}{dt^2} - x\frac{d^2 z}{dt^2}\right)$$

$$= \sum (z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) + \lambda \sum \left(z\frac{d\mathrm{L}}{dx} - x\frac{d\mathrm{L}}{dz}\right) + \ldots,$$

$$\sum m\left(x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2}\right)$$

$$= \sum (x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) + \lambda \sum \left(x\frac{d\mathrm{L}}{dy} - y\frac{d\mathrm{L}}{dx}\right) + \ldots,$$

et si le système est libre :

$$\sum m\left(y\frac{d^2 z}{dt^2} - z\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \sum (y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}),$$

$$\sum m\left(z\frac{d^2 x}{dt^2} - x\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \sum (z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}),$$

$$\sum m\left(x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = \sum (x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}).$$

De là on tire le théorème des moments, et, dans un cas particulier, le principe des aires.

Ces équations, comme on voit, ont lieu dans le cas même où le système incomplétement libre pourrait tourner autour de l'origine après sa solidification.

En comparant les démonstrations précédentes à celles des Traités usuels de Mécanique, elles nous semblent préférables, d'abord parce qu'après avoir établi les équations du mouvement, il est naturel d'y chercher toutes ses propriétés générales, ensuite parce qu'on aperçoit très-bien par notre voie les conditions précises que le système doit remplir.

7. Nous pouvons nous demander à présent quelle composition supposent pour les équations

$$L = o, \quad M = o, \ldots,$$

relativement aux coordonnées, les conditions (B) différentielles de *liberté* du système.

Pour résoudre ce problème, il suffit d'intégrer les équations (B) aux dérivées partielles; mais on parvient au même but plus facilement peut-être en suivant la marche que nous allons indiquer.

A un instant quelconque, la forme du système est déterminée, si nous nous donnons les trois côtés du triangle $AA'A''$; puis les distances à ces trois sommets de chacun des autres points. Si actuellement nous nous donnons la position du triangle $AA'A''$, le système sera déterminé de forme et de position. Or, pour placer le triangle $AA'A''$, il suffit de connaître les trois coordonnées x, y, z du point A, deux coordonnées x', y' de A', une coordonnée x'' de A'', puisqu'en vertu des distances connues, il existe trois équations entre les coordonnées des points A, A' et A''. Donc en posant

$$AA' = p, \quad AA'' = q, \quad A'A'' = r, \quad AA''' = s, \ldots,$$

on aura entre les coordonnées x, y, z, x', etc., et les distances p, q, r, s, etc., $3n-6$ relations, d'où l'on tirera $3n-6$ coordonnées en fonction des six

$$x,\quad y,\quad z,\quad x',\quad y',\quad x''.$$

Substituant dans les équations

$$\mathrm{L}=0,\quad \mathrm{M}=0,\ldots,$$

chacune deviendra dans son premier membre fonction de ces six coordonnées et des distances p, q, r, etc., de sorte qu'on aura en particulier

$$0=\mathrm{L}=\mathrm{F}(x,y,z,x',y',x'',p,q,r,\ldots).$$

Actuellement supposons le système libre, donnons-lui les mouvements arbitraires déjà indiqués, et observons qu'après la solidification p, q, r, etc., ne changent pas; nous obtiendrons les identités

$$0=\frac{d\mathrm{L}}{dx}+\frac{d\mathrm{L}}{dx'}+\frac{d\mathrm{L}}{dx''},$$

$$0=\frac{d\mathrm{L}}{dy}+\frac{d\mathrm{L}}{dy'},$$

$$0=\frac{d\mathrm{L}}{dz},$$

$$0=y\frac{d\mathrm{L}}{dz}-z\frac{d\mathrm{L}}{dy}-z'\frac{d\mathrm{L}}{dy'},$$

$$0=z\frac{d\mathrm{L}}{dx}-x\frac{d\mathrm{L}}{dz}+z'\frac{d\mathrm{L}}{dx'}+z''\frac{d\mathrm{L}}{dx''},$$

$$0=x\frac{d\mathrm{L}}{dy}-y\frac{d\mathrm{L}}{dx}+x'\frac{d\mathrm{L}}{dy'}-y'\frac{d\mathrm{L}}{dx'}-y''\frac{d\mathrm{L}}{dx''}.$$

De la quatrième nous tirons

$$\frac{\frac{d\mathrm{L}}{dy}}{z'}=\frac{\frac{d\mathrm{L}}{dy'}}{-z}=\frac{0}{z'-z}\ (*),$$

(*) Car $\frac{d\mathrm{L}}{dy}+\frac{d\mathrm{L}}{dy'}=0$. Tm.

et comme on peut toujours choisir un système d'axes tel, que $z - z'$ ne soit pas constamment nul, on voit que

$$\frac{dL}{dy} = 0, \quad \frac{dL}{dy'} = 0.$$

Des deux dernières, on tire alors

$$\frac{\frac{dL}{dx}}{y'z'' - z'y''} = \frac{\frac{dL}{dx'}}{zy'' - yz''} = \frac{\frac{dL}{dx''}}{yz' - zy'}$$

$$= \frac{0}{(y'z'' - z'y'') + (y''z - z''y) + (yz' - zy')},$$

par suite

$$\frac{dL}{dx} = 0, \quad \frac{dL}{dx'} = 0, \quad \frac{dL}{dx''} = 0.$$

Donc enfin,

Un système défini par les équations

$$L = 0, \quad M = 0, \ldots,$$

sera libre, si ces équations ont lieu seulement entre les fonctions des coordonnées qui déterminent la forme du système, sans déterminer sa position dans l'espace.

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p. 408);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

---

25. Comme application des théorèmes qui précèdent, je vais donner les caractères auxquels on reconnaît qu'une

surface du second ordre est de révolution, en conservant aux axes une direction quelconque.

Soit

$$(1)\quad \varphi = \left\{\begin{array}{l} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 \\ \quad + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{23} x_2 x_3 \\ \quad + 2 a_{24} x_2 x_4 + 2 a_{34} x_3 x_4 \end{array}\right\} = 0,$$

l'équation d'une surface du second ordre, et

$$(2)\quad \mathrm{F} = \left\{\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + c_{44} x_4^2 + 2 c_{12} x_1 x_2 + 2 c_{13} x_1 x_3 \\ \quad + 2 c_{14} x_1 x_4 + 2 c_{23} x_2 x_3 + 2 c_{24} x_2 x_4 \\ \quad + 2 c_{34} x_3 x_4 \end{array}\right\} = 0,$$

l'équation d'une sphère.

Nous avons posé

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} c_{12} = c_{21} = \cos(x_1, x_2); \\ c_{13} = c_{31} = \cos(x_1, x_3); \\ c_{23} = c_{32} = \cos(x_2, x_3); \\ c_{14} = c_{41} = m_1 + m_2 c_{12} + m_3 c_{13}; \\ c_{24} = c_{42} = m_1 c_{21} + m_2 + m_3 c_{23}; \\ c_{34} = c_{43} = m_1 c_{31} + m_2 c_{32} + m_3; \\ c_{44} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2 c_{12} m_1 m_2 + 2 c_{13} m_1 m_3 \\ \qquad + 2 c_{23} m_2 m_3 - r^2; \end{array}\right.$$

dans ces formules, r désigne le rayon de la sphère, et $(-m_1, -m_2, -m_3)$ les coordonnées de son centre.

L'équation la plus générale des surfaces du second ordre, passant par l'intersection de la sphère et de la surface proposée, sera

$$(4)\qquad \varphi + \lambda \mathrm{F} = 0.$$

Or la condition nécessaire et suffisante pour que la surface représentée par l'équation (1) soit de révolution,

est que la surface (4) se réduise à deux plans parallèles ; car alors les intersections de la surface du second degré par la sphère variable (2) se composeront d'une série de cercles parallèles ; et le lieu des centres de ces sphères sera l'axe de révolution.

En appliquant à l'équation (4) les conditions énoncées au n° **24** pour que l'équation du second degré représente deux plans parallèles, on obtient les cinq relations suivantes :

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l}
\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12}+\lambda c_{12} \\ a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda \end{vmatrix} = 0, \\[2ex]
\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{13}+\lambda c_{13} \\ a_{31}+\lambda c_{31} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix} = 0, \\[2ex]
\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12}+\lambda c_{12} & a_{13}+\lambda c_{13} \\ a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda & a_{23}+\lambda c_{23} \\ a_{31}+\lambda c_{31} & a_{32}+\lambda c_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix} = 0, \\[2ex]
\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12}+\lambda c_{12} & a_{14}+\lambda c_{14} \\ a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda & a_{24}+\lambda c_{24} \\ a_{41}+\lambda c_{41} & a_{42}+\lambda c_{42} & a_{44}+\lambda c_{44} \end{vmatrix} = 0, \\[2ex]
\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{13}+\lambda c_{13} & a_{14}+\lambda c_{14} \\ a_{31}+\lambda c_{31} & a_{33}+\lambda & a_{34}+\lambda c_{34} \\ a_{41}+\lambda c_{41} & a_{43}+\lambda c_{43} & a_{44}+\lambda c_{44} \end{vmatrix} = 0.
\end{array} \right.$$

26. Les deux premières des équations (5) donnent

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} (a_{11}+\lambda)(a_{22}+\lambda) = (a_{12}+\lambda c_{12})^2, \\ (a_{11}+\lambda)(a_{33}+\lambda) = (a_{13}+\lambda c_{13})^2. \end{array} \right.$$

Si l'on développe la troisième par rapport aux éléments de la troisième colonne, puis qu'on ait égard à la première des équations (5), et aux relations (6), il viendra

$$(a_{22}+\lambda)(a_{33}+\lambda) = (a_{23}+\lambda c_{23})^2,$$

Nous obtenons ainsi les trois relations définitives

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda) = (a_{12} + \lambda c_{12})^2, \\ &(a_{22} + \lambda)(a_{33} + \lambda) = (a_{23} + \lambda c_{23})^2, \\ &(a_{33} + \lambda)(a_{11} + \lambda) = (a_{31} + \lambda c_{31})^2; \end{aligned}\right.$$

qu'on pourra remplacer par les trois suivantes :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_{33} + \lambda)(a_{12} + \lambda c_{12}) = (a_{31} + \lambda c_{31})(a_{32} + \lambda c_{32}), \\ &(a_{11} + \lambda)(a_{23} + \lambda c_{23}) = (a_{12} + \lambda c_{12})(a_{13} + \lambda c_{13}), \\ &(a_{22} + \lambda)(a_{31} + \lambda c_{31}) = (a_{23} + \lambda c_{23})(a_{21} + \lambda c_{21}). \end{aligned}\right.$$

L'élimination de λ entre ces trois relations conduira aux *deux équations de condition* nécessaires et suffisantes pour que la surface représentée par l'équation (1) soit de révolution.

Ces équations d'ailleurs se présentent sous une forme assez compliquée, et il est préférable de conserver les relations primitives (7) ou (8).

En introduisant, dans les relations (8), l'hypothèse

$$c_{12} = c_{23} = c_{31} = 0,$$

on retrouve les équations connues dans le cas des axes rectangulaires.

27. Développons maintenant les deux dernières équations (5). La quatrième donne

$$\left.\begin{aligned} &(a_{14} + \lambda c_{14}) \begin{vmatrix} a_{21} + \lambda c_{21} & a_{22} + \lambda \\ a_{41} + \lambda c_{41} & a_{42} + \lambda c_{42} \end{vmatrix} \\ -&(a_{24} + \lambda c_{24}) \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} + \lambda c_{12} \\ a_{41} + \lambda c_{41} & a_{42} + \lambda c_{42} \end{vmatrix} \\ +&(a_{44} + \lambda c_{44}) \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} + \lambda c_{12} \\ a_{21} + \lambda c_{21} & a_{22} + \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Si l'on remarque que le dernier déterminant est nul, et

qu'on ait égard aux relations (7) ou (8), il vient après réduction

$$(9)\qquad (a_{11}+\lambda)(a_{24}+\lambda c_{24})=(a_{12}+\lambda c_{12})(a_{14}+\lambda c_{14}).$$

On trouvera de même, en développant la dernière des équations (5),

$$(10)\qquad (a_{11}+\lambda)(a_{34}+\lambda c_{34})=(a_{13}+\lambda c_{13})(a_{14}+\lambda c_{14}).$$

Ces deux dernières relations peuvent s'écrire

$$(11)\qquad \frac{a_{14}+\lambda c_{14}}{a_{11}+\lambda}=\frac{a_{24}+\lambda c_{24}}{a_{12}+\lambda c_{12}}=\frac{a_{34}+\lambda c_{34}}{a_{13}+\lambda c_{13}}.$$

Or la sphère (2) a pour coordonnées de son centre $(-m_1, -m_2, -m_3)$; on obtiendra donc le lieu des centres, ou les équations de l'*axe de révolution*, en remplaçant, dans les équations (11), m_1, m_2, m_3 respectivement par $-\frac{x_1}{x_4}$, $-\frac{x_2}{x_4}$, $-\frac{x_3}{x_4}$; les c_{14}, c_{24}, c_{34} étant définis par les relations (3). On trouve ainsi

$$(12)\left\{\begin{aligned}\frac{\lambda(x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3)-a_{14}x_4}{a_{11}+\lambda}&=\frac{\lambda(c_{21}x_1+x_2+c_{23}x_3)-a_{24}x_4}{a_{12}+\lambda c_{12}}\\&=\frac{\lambda(c_{31}x_1+c_{32}x_2+x_3)-a_{34}x_4}{a_{13}+\lambda c_{13}};\end{aligned}\right.$$

la quantité λ est déterminée par les équations (7) ou (8).

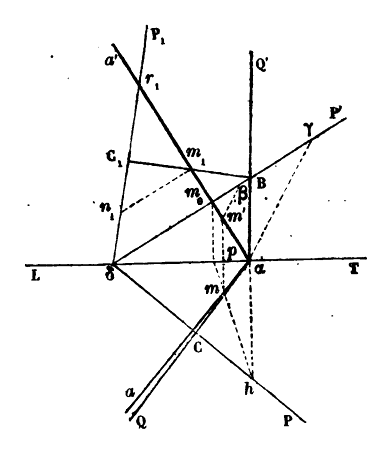
La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 450

(voir p. 360);

PAR M. H. DE CHARDONNET.

Je mène un plan perpendiculaire à la droite donnée.



Par son point d'intersection avec cette droite, je mène, dans ce plan, une droite qui en rencontre les traces à égale distance de part et d'autre du point d'intersection. Ces nouvelles intersections appartiennent évidemment aux traces du plan cherché, traces qui coupent la ligne de terre au même point que les projections de la droite donnée.

Construction graphique.

Je mène le plan $(P'\delta P)$ perpendiculaire à la droite donnée (aa') et je cherche l'intersection (mm') de cette droite avec le plan (PP') par les moyens connus. Je fais

tourner ensuite le plan (PP′) autour de la trace P′. Le point (mm') se rabattra sur le point vertical en m_1, sur la projection a' (perpendiculaire à P′), et à une distance $m_0 m_1$ de la charnière P′ donnée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés m_0, m', et la distance mp du point (mm') au plan vertical. Le point h de la trace P, qui se projette verticalement en α, tombera de même en r_1, sur la projection a' à une distance de P′ donnée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés αh et αm_0. Ces deux triangles auxiliaires seront construits sur la figure même en $m_0 \beta m'$ et $m_1 \gamma \alpha$. Menons dr_1, rabattement de la trace P. Par le point m_1, on tracera m_1, n_1 parallèles à P′; puis on prendra sur la ligne δr_1, à partir de son intersection n_1 avec $m_1 n_1$, $n_1 C_1 \delta = n_1$. On mènera ensuite la droite $C_1 m_1$ qu'on prolongera jusqu'à la rencontre B avec P′; enfin on portera δC_1 en δC sur la ligne P et on joindra $C\alpha$. On aura ainsi la trace horizontale Q du plan cherché : la trace verticale Q′ s'obtiendra en joignant αB.

Note. MM. Dollé (Charles), ex-élève du collége de Compiègne, Moncomble (A.), élève du lycée de Douai, ont adressé la même solution.

M. Dislère (Paul), élève du lycée de Douai (classe de M. David), fait usage des plans de rabattement, uniquement pour montrer un emploi de ce procédé.

SOLUTION DE LA QUESTION 458

(voir p. 434);

PAR M. A. CORNET,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

$$\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \text{L.}2 \text{ quand } n \text{ dev. infini.}$$

J'effectue successivement les divisions de 1 par $n+1$, $n+2$, $n+3$,..., $2n$ et j'obtiens

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}+\ldots\pm\frac{1}{n^{p+1}}\mp\ldots,$$

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{2^2}{n^3}-\frac{2^3}{n^4}+\ldots\pm\frac{2^p}{n^{p+1}}\mp\ldots,$$

$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{3^2}{n^3}-\frac{3^3}{n^4}+\ldots\pm\frac{3^p}{n^{p+1}}\mp\ldots,$$

....

$$\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\frac{n}{n^2}+\frac{n^2}{n^3}-\frac{n^3}{n^4}+\ldots\pm\frac{n^p}{n^{p-1}}\mp\ldots.$$

Je dis maintenant que la somme des termes d'une colonne verticale quelconque des seconds nombres a pour limite une fraction dont le numérateur est l'unité et le dénominateur l'exposant de n au dénominateur commun à tous les termes de cette colonne verticale ; ainsi la somme de la $(p+1)^{ième}$ colonne verticale a pour limite $\frac{1}{p+1}$ quand n augmente indéfiniment.

En effet, ces termes ont pour numérateurs les n premiers nombres entiers élevés à la puissance p ; leur dénominateur commun est n^{p+1} ; leur somme est, d'après une formule connue,

$$\sum=\frac{S_p}{n^{p+1}}$$

$$=\frac{(n+1)^{p+1}-\frac{(p+1)p}{1.2}S_{p-1}-\frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}S_{p-2}\ldots(n+1)}{(p+1)\,n^{p+1}}.$$

Les quantités S_{p-1}, S_{p-2}, etc., sont les sommes des n premiers nombres élevés à la puissance $p-1$, $p-2$, etc.; elles sont du degré p, $p-1$, etc., en n ; donc en divisant

haut et bas par n^{p+1}, il vient

$$\sum = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} - \frac{A}{n} - \frac{A'}{n^2} - \ldots}{p+1}.$$

Quand n tend vers l'infini, on a

$$\lim \sum = \frac{1}{p+1}.$$

D'après cela, quand n tend vers l'infini, la somme de $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$, qui est égale à la somme de toutes les colonnes verticales, tend vers

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

qui est le développement de L. 2. G. Q. F. D.

Note. C'est une conséquence de la question 453; en effet lorsque n est infini, les deux limites deviennent égales; et alors

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \log n,$$

formule connue $\left(\text{le terme } \frac{1}{n} \text{ a été oublié}\right)$, et aussi

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{kn} = \log kn.$$

La soustraction donne

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn} = \log k \quad (\text{pour } n = \infty).$$

[Communiqué par M. LEBESGUE (*).]

(*) Le savant arithmologue fera paraître incessamment, par feuilles, des exercices sur la théorie des nombres, qui, par des échelons habilement placés, mèneront le lecteur sans fatigue du sol au faîte de l'édifice; ouvrage utile aux élèves, indispensable aux professeurs *sérieux*.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XVII.)

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie; Arithmétique.

Analyse combinatoire; Calcul des probabilités.

Déterminants; Covariants; Invariants.

Calcul infinitésimal; Dérivées; Séries.

(*) Il s'est glissé plusieurs fautes typographiques qui seront corrigées.

Géométrie élémentaire, théorique et pratique.

Trigonométrie plane et sphérique; Analyse et lignes sphériques.

Géométrie segmentaire.

Coniques planes.

Surfaces du second ordre.

Courbes planes en général.

Géométrie de l'espace; Lignes et Surfaces.

Mécanique; Statique.

Astronomie.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des auteurs d'articles sont précédés d'un astérisque.)

QUESTIONS NON RÉSOLUES*

Dans les dix-sept premiers volumes.

Nos.	Pages.
TOME II.	
61	48
TOME IV.	
93	259
TOME V.	
120	202
TOME VII.	
192	368
TOME X.	
240	357
TOME XI.	
251 (échecs) (FAURE.)	115
252 (domino) (RÉDACT.)	115
266	401
TOME XII.	
270	99
280	327
TOME XIV.	
313	305
TOME XV.	
317	52
324	229
325	229
331	243
333	243
342	353
343	353

Nos.	Pages.
TOME XVI.	
357	57
375	127
379	179
383	180
385	182
399	390
400	391
406	401
TOME XVII.	
414	31
420	32
423	32
424	33
429	139
430	140
434	186
435	186
439	187
441	187
443	262
445	262
447	358
448	359
449	359
452 à 458	434

Observation. Sur 458 questions, il en reste 46 à résoudre. Les autres sont imprimées, ou bien en manuscrit, et paraîtront en 1859.

ERRATA.

TOME VIII.

Page 111, ligne 10, *au lieu de* φ^2, *lisez* ψ^2.

TOME XI.

Page 468, ligne 5 en remontant, *au lieu de* arc, *lisez* axe.

TOME XIV.

Page 384, ligne 5, *au lieu de* 304, *lisez* 294.

TOME XVI.

Page 51, ligne 1, *au lieu de* intérieur, *lisez* extérieur.
51, ligne 12 en remontant, *au lieu de* bissextrices, *lisez* bissectrices.
67, ligne 4 en remontant, *au lieu de* tangante, *lisez* tangente.
118, ligne 5 en remontant, *au lieu de* 20°, *lisez* 2°.
390, ligne 14, *au lieu de* $\frac{1}{\left(\frac{1}{oa}+\frac{1}{ox'}\right)^2}$, *lisez* $\frac{1}{\left(\frac{1}{oa}+\frac{1}{oa'}\right)^2}$.
431, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $\frac{2A}{2}$, *lisez* $\frac{2A}{\pi}$.
432, ligne 4, *au lieu de* D, *lisez* B.
436, ligne 7 en remontant, *au lieu de* ax^3, *lisez* ax^2.
450, ligne 2, *au lieu de* $a(a-x)$, *lisez* $x(a-x)$.
450, ligne dernière, *au lieu de* $a(a-x)$, *lisez* $x(a-x)$.
470, ligne 6, *au lieu de* algorithmétique, *lisez* algorithmique.

TOME XVII.

Page 49, ligne 2, *au lieu de* un même point, *lisez* trois mêmes points.
49, ligne 8, *au lieu de* une même droite, *lisez* trois mêmes droites.
87, dernière ligne, *au lieu de* $\frac{dA}{da}$, *lisez* $\frac{dL}{da}$.
87, dernière ligne, *au lieu de* $\frac{dA}{db}$, *lisez* $\frac{dL}{dl}$.
242, ligne 2, *au lieu de* Heilermann, *lisez* Hellermann.
299, ligne 14, *au lieu de* y_x, z_x, *lisez* y_y, z_y.
300, ligne 13, *au lieu de* $\frac{(T_0S_0)}{p}+$, *lisez* $\frac{(T_0S_0)}{p}=$.
303, ligne 10 en rem., *au lieu de* $4(ac-b^2)$, *lisez* $4(ac-b^2)(bd-c^2)$.
441, ligne 7, *au lieu de* $4-2$, *lisez* $n-2$.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIBLIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

BIBLIOGRAPHIE.

Eléments d'Algèbre, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles spéciales, par *Eugène Rouché*, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, professeur au lycée Charlemagne. In-8 de xiv-286 pages. Paris, Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 4 francs.

D'après M. Lamé, parmi les élèves qui suivent les cours de mathématiques des lycées, un tiers apporte toute l'attention nécessaire pour profiter de ce genre d'études. Ce premier contingent, qui peuple seul les diverses écoles générales, s'y fractionne encore une fois sous le point de vue de l'aptitude mathématique : là le quart des élèves étudie les sciences exactes avec goût. M. Rouché a écrit dix-sept chapitres pour le bon tiers et quatre pour l'excellent quart. Le professeur développera en chaire les dix-sept premiers chapitres et réservera les autres pour l'auditoire choisi de la conférence.

Préférez dans l'enseignement les méthodes générales, disait Laplace aux élèves de l'Ecole Normale, attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les

plus faciles. M. Rouché a suivi cet excellent conseil, ce qui ne l'empêche pas à l'occasion d'indiquer des artifices propres à des cas particuliers.

L'idée d'appliquer la géométrie à l'algèbre est assez simple pour être introduite dans les éléments, et en cela l'auteur s'est montré selon nous très-judicieux, et nous avons été d'autant plus satisfait à la lecture de ce chapitre, que nous-même, précisément à propos des maximums, avons l'habitude dans notre enseignement de donner ces notions de l'emploi des coordonnées.

Chaque règle est suivie d'un exemple qui en fixe le sens; nous citerons parmi les problèmes du livre celui des courriers, de la division en moyenne et extrême, de Pappus, du cône circonscrit à la sphère, des pompes, des puits, des lumières, problèmes bien anciens, mais que l'on peut rajeunir par l'exposition.

Il est en algèbre un point délicat sur lequel on a longtemps disputé et sur lequel on disputera peut-être toujours : je veux parler des quantités négatives. Une des théories qui nous ont le plus séduit est celle que M. Duhamel exposait dans ses Leçons à l'Ecole Normale et à la Faculté des Sciences, et qui est en partie reproduite dans les *Algèbres* de M. Bertrand et de M. Guilmin. M. Rouché nous semble être de la même école (*voir* la Note à la fin).

Nous le félicitons enfin d'avoir semé son livre de notions historiques. L'expérience nous a appris que les élèves écoutent avec intérêt les détails biographiques, et puisque M. Rouché sollicite les observations de ses collègues, nous nous permettrons de demander trois lignes pour chaque nom propre, placées au bas de la page et indiquant la naissance, la mort, les principaux ouvrages de l'auteur cité.

J.-Ch. Dupain,
Agrégé des Sciences.

Note du Rédacteur. L'homme ne peut rien *créer,* ne peut rien *anéantir.* Ces deux pouvoirs n'appartiennent qu'à Dieu. Notre zéro est un objet conventionnel. On peut prendre pour zéro tel instant de temps que l'on veut : alors toutes les années de l'avenir deviennent *positives,* celles du passé *négatives.* C'est la théorie de M. Hamilton, le célèbre géomètre de l'Irlande (*). On peut placer le zéro à tel point de l'espace que l'on veut : alors dans une direction les distances sont positives, et dans la direction opposée négatives. On peut regarder comme *nulle* telle position de fortune que l'on veut. Il est possible que M. de Rothschild considère comme n'ayant rien un homme qui ne possède qu'un million. Alors tout ce qui est au-dessus est positif et tout ce qui est au-dessous négatif. On dit même dans le langage ordinaire d'un homme endetté qu'il est au-dessous de ses affaires. Les opérations sur les quantités négatives sont donc aussi claires, aussi réelles, aussi certaines, aussi indispensables que sur les quantités positives. Vouloir n'agir que sur celles-ci et ramener les résultats négatifs à des conventions en vue de je ne sais quelle généralisation, c'est détruire la certitude apodictique de l'algèbre, c'est la réduire à une méthode contingente, c'est rétrograder jusqu'aux Arabes, aller de six siècles en arrière. Assez de gens s'attellent pour ce but au char de la raison, en philosophie, en littérature ; ne les imitons pas en mathématique.

Une logique rigoureuse, la recherche et l'amour de la vérité pour elle-même, forment la partie *morale* des mathématiques, qui par là appartiennent essentiellement à l'école stoïque. Offrir à la jeunesse, au début de la vie, des applications *utiles,* des méthodes d'*approximation,* comme objet principal d'étude, c'est dénaturer le

(*) On se prépare à soutenir bientôt une thèse sur les *Quaternions* de l'illustre professeur de Dublin.

but de l'éducation et peut avoir de funestes résultats. Toutefois, il ne faut pas confondre cette *rigueur* avec la manie démonstrative, qui, se défiant du sens commun, enlève au lecteur toute spontanéité. Est-il bien nécessaire de prouver que lorsqu'il faut ajouter la quantité A au polynôme $a+b+c+d$, il est permis d'écrire $A+a+b+c+d$? d'établir comme corollaire que $(a^p)^q$ et $(a^q)^p$ étant tous deux équivalents à a^{pq}, donc ils sont égaux, et autres propositions analogues sur les égalités et les inégalités? Savoir ce qu'il ne faut pas dire est un art difficile, qu'on rencontre rarement.

Les questions proposées par M. Rouché sont d'un bon choix, dans le genre de celles qu'on lit dans les traités de MM. Bertrand et Catalan. Nous garantissons aux élèves qui s'exerceront à résoudre ces questions qu'ils deviendront *forts*. Il s'y est glissé quelques fautes typographiques non indiquées. Ainsi page 163, question de la *pompe*, on lit au bas $L(H-x)(l-x)$, il faut $4(H-x)(l-x)$, faute qui se reproduit à la page suivante. A la fin de cette solution (p. 164), on lit : *puis, en multipliant* x *par la hauteur trouvée, etc.*: il y a ici quelque omission.

L'auteur donne pour les découvertes principales des dates et des notions historiques, ce qui ôte la fatigue fastidieuse que fait subir l'accumulation continue de théories sur théories, théorèmes sur théorèmes, formules sur formules. L'introduction du *point* pour désigner la multiplication est de Leibnitz et non de Jean Bernoulli.

En résumé, nous applaudissons avec M. Dupain à l'apparition d'un ouvrage qui porte le cachet du progrès. Nous signalons encore comme progrès la publication prochaine des Tables de Logarithmes de Gauss par M. le professeur Hoüel, savant auteur d'une savante thèse sur les équations Hamilton.

Eléments d'Arithmétique, à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Ecoles du gouvernement; par M. *Lionnet*, agrégé de l'Université, professeur de mathématiques pures et appliquées au lycée impérial Louis-le-Grand, examinateur suppléant d'admission à l'Ecole Navale. 3e édition, rédigée conformément au *Programme* officiel des lycées; autorisée par l'Université. Paris, Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire, 1857; in-8 de VIII-211 pages. Prix : 4 francs.

Les ouvrages suivants présentent une remarquable longévité littéraire :

L'Arithmétique en sa perfection, mise en pratique selon l'usage des financiers, banquiers et marchands, contenant une ample et familière explication de ses principes tant en nombres entiers qu'en fractions; avec un traité de Géométrie pratique appliquée à l'arpentage et au toisé, tant des superficies que des corps solides, et un abrégé d'Algèbre, suivy de quantités de questions non moins curieuses que nécessaires. Sixième édition, par F. Le Gendre, arithméticien. A Paris, chez l'autheur, rue Chanverrerie, aboutissant en rue Saint-Denis, vis-à-vis la Reyne de Pologne. MDCLXXII. *In*-4 (*).

La 1re édition est de 1646, in-4; la 10e de Lyon, 1691, in-8. Dans le XVIIIe siècle, il y a six éditions : 1705, 1718, 1723, 1745, 1755, 1774. Dans le siècle actuel, il y en a encore deux : Paris, 1806, in-12; Lons-le-Saulnier, 1813, in-12.

Le Gendre a précédé le célèbre Barrême dont l'*Arithmétique* a paru pour la première fois en 1677 et qui a

(*) Dans la préface il dit avoir publié :

1°. Un traité des changes étrangers;

2°. La vraye manière de tenir livres de comptes ou de raison par partie double.

eu de nombreuses éditions dont la dernière est de 1811. Avignon, in-12.

Nos traités d'arithmétique actuels iront-ils aussi loin? c'est ce qu'on verra en 2058; mais le français d'aujourd'hui sera-t-il encore intelligible dans deux siècles? Possible que non, si l'anarchie grammaticale et littéraire, si la violation des règles classiques vont en augmentant. Je m'assure que déjà Racine ressuscité aurait besoin d'une certaine contention d'esprit pour comprendre grand nombre de nos poëtes, et ceux que de son temps Voltaire traitait de Welches sont des Athéniens en comparaison de certains écrivains contemporains :

Si tu subis la loi hautaine
De tous nos bruyants novateurs,
Bientôt Racine et la Fontaine
Auront besoin de traducteurs.

(Béranger, *Dernières chansons*, p. 122.)

Mais revenons à notre *spécialité*, locution qui aurait fait grimacer Voltaire, et avec raison (*).

Keppler, dans l'introduction de son immortel ouvrage *Astronomia nova*, fait ressortir les difficultés que présente la rédaction mathématique :

Nisi enim servaveris genuinam subtilitatem proportionum, instructionum, demonstrationum, liber non erit mathematicus; sin autem servaveris, lectio efficitur morosissima....

« Car si vous ne conservez pas la minutieuse exactitude que requièrent les expositions, les propositions, les démonstrations, l'ouvrage n'est plus mathématique; si vous la conservez, la lecture devient extrêmement rebutante. »

(*) Les langues mortes ont l'immense avantage d'être invariables. Cicéron est plus intelligible, plus clair pour nous que les romans du cycle carlovingien, que Joinville, Rabelais et même certaines pages de Montaigne.

Et plus loin il continue ainsi :

Dum igitur medeor obscuritati materiæ insertis circumlocutionibus, jam mihi contrario vitio videor in re mathematica loquax, et habet ipsa etiam prolixitas phrasium suam obscuritatem non minorem quam concisa brevitas. Hæc mentis oculos effugit, illa distrahit; eget hæc luce, illa splendoris copia laborat; hic non movetur visus, illic plane excæcatur.

« Lorsque je cherche par des circonlocutions insérées dans le discours à remédier à l'obscurité de la matière, il me semble que, tombé dans le vice opposé, je deviens phrasier. D'ailleurs la prolixité entraîne une obscurité non moins grande qu'une extrême concision. Celle-ci échappe aux regards de l'esprit, celle-là en détourne ; l'une est privée de lumière, l'autre pèche par excès d'éclat ; ici l'œil reste fermé, là il est ébloui. »

L'auteur de cette arithmétique, professeur émérite, s'est mis en garde contre ce double écueil. Déjà nous avons rendu complète justice à la première édition (t. VI, p. 439).

Eclairé par l'expérience et aussi pour satisfaire aux exigences du moment, l'auteur a fait de notables changements de formes dans cette troisième édition.

1°. L'*Arithmétique* (3e édition), au lieu d'être divisée en cinq livres comme la deuxième, est divisée en dix-neuf chapitres.

Ce nouveau mode de divisions principales permet, sans rompre l'enchaînement théorique, de faire suivre plus immédiatement chaque groupe de principes de ses applications qui, sous le titre d'*Exercices*, terminent chacun des chapitres.

2°. L'auteur a cru devoir abandonner les subdivisions des livres ou chapitres en théorèmes et problèmes (comme c'est l'usage en géométrie élémentaire), et la remplacer par une subdivision en paragraphes numérotés.

3°. La théorie de la division des nombres entiers (chapitre IV) est beaucoup plus développée.

4°. La 2e édition ne contenait pas les approximations qui forment le chapitre X de la 3e édition.

On y remarque une théorie et une règle pratique de la division abrégée qui sont particulières à l'auteur, et dont l'usage s'est répandu dans la plupart des établissements d'instruction publique, et cette règle abrégée est rédigée d'une manière abrégée, ce qui n'est pas la chose ordinaire.

6°. Le chapitre XIII comprend quelques notions sur les anciennes mesures de France, exigées par les nouveaux programmes officiels.

7°. La théorie des proportions (chapitre XVI) a été considérablement simplifiée.

On a très-bien fait de ramener la théorie des proportions à celle des fractions; mais il y a des gens qui veulent supprimer les proportions. Ceci rappelle cet homme qui, ayant entendu dire que le grand Frédéric avait perdu une bataille pour avoir mal placé son aile gauche, conseillait de supprimer les ailes gauches.

8°. Les règles de trois, d'intérêt, de société et d'alliage (chapitre XVII et XVIII) s'appuient sur la méthode dite de *réduction à l'unité* qu'on doit au baron Reynaud.

9°. La théorie des progressions et des logarithmes est renvoyée, conformément aux programmes officiels, aux éléments d'algèbre.

10°. Le chapitre XIX comprend l'usage des logarithmes et de la règle à calcul pour abréger le calcul numérique. Il est destiné particulièrement (conformément aux programmes officiels) aux élèves de troisième (sciences).

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE; par *Maximilien Marie*, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur à l'institution Notre-Dame, dirigée à Auteuil par M. Lévêque. Arnaud de Vresse, éditeur. Paris, 1857.

On a beaucoup écrit sur l'arithmétique et sous des points de vue très-variés. Reynaud, Bourdon nous ont laissé des Traités remarquables à plus d'un titre. Dans ces dernières années ont paru ceux de MM. Bertrand et Serret; tous, prenant la science des nombres pour point de départ dans les études mathématiques, en offrent les principes dans un ordre logique et procèdent du simple au composé.

Après la publication du nouveau plan d'études, certains auteurs, prenant à la lettre le texte même des programmes sans en saisir l'esprit, ont inondé le corps enseignant de publications dans lesquelles la science mutilée est souvent réduite à des proportions microscopiques. Les Leçons que nous analysons aujourd'hui pourraient être regardées comme une protestation contre la tendance de ces auteurs à supprimer dans les études les idées de généralité. M. Marie, convaincu que l'arithmétique ne peut être étudiée sans le secours de l'algèbre, abandonne les usages reçus et ne procède pas toujours du simple au composé.

L'ouvrage est divisé en trois parties : le calcul des entiers, celui des fractions et celui des incommensurables.

Après la numération, on trouve des remarques ayant pour but d'initier aux différents systèmes de numération. Les définitions des quatre opérations fondamentales n'étant point données sous un point de vue purement abstrait, exigent, notamment pour la division, de longues explications. Les procédés d'opérations sont exposés et

discutés sans le secours d'exemples et repris ensuite sous forme synthétique.

Les énoncés relatifs aux principes qui se rapportent aux produits et aux quotients ont reçu des modifications presque radicales. Peut-être ne sont-elles pas heureuses, car l'élève laborieux qui veut s'instruire ne consulte pas seulement un ouvrage, et c'est lui imposer un travail pénible que de supprimer les points de repère qui lui marquent le droit chemin.

La recherche du plus petit multiple commun est basée uniquement sur la décomposition des nombres en facteurs premiers. En ce point, nous signalons une lacune fâcheuse, car les procédés de décomposition sont impraticables pour des nombres qui n'admettent que des facteurs premiers un peu grands. La méthode du plus grand commun diviseur n'est pas *un exercice*, c'est une méthode sûre, tandis que l'autre n'est qu'un expédient en usage dans les cas très-simples.

Le calcul des fractions est précédé de la théorie des rapports et proportions. L'auteur analyse avec beaucoup de soin tous les cas relatifs à l'expression du rapport des grandeurs homogènes. Les avantages qui résultent de l'emploi de la plus grande commune mesure, les conditions d'égalité des rapports de grandeurs incommensurables, forment un corps de doctrine complet et nettement exposé.

Dans le retour des quotients périodiques aux génératrices, l'auteur laisse à l'élève une tâche trop rude en l'engageant à rétablir lui-même ce qui manque de rigueur à son raisonnement. La sommation d'un nombre illimité de quantités décroissantes et suivant une loi déterminée, n'est pas facile à deviner, et le premier exemple qui se présente devrait être traité sans restrictions.

Un chapitre est consacré à la résolution des règles de

trois et aux applications. L'auteur n'a pas cru qu'il fût nécessaire d'exposer le système métrique, les anciennes mesures et leurs rapports mutuels.

Dans le calcul des incommensurables, on distingue d'abord des notions sur la continuité des fonctions et la théorie générale des approximations. Les méthodes basées sur les erreurs absolues sont suivies de celles qui résultent de la considération des erreurs relatives, l'auteur met en évidence la simplicité de ces dernières. Viennent ensuite les opérations abrégées, une théorie des racines de degré *p* servant de base aux procédés d'extraction des racines carrées et cubiques des trois espèces de nombres. Cette partie est complétée par un procédé abrégé dû à Wantzel pour calculer une racine composée d'un grand nombre de chiffres.

L'ouvrage se termine par la théorie des progressions et des logarithmes, précédée du calcul des radicaux et des exposants de nature quelconque.

De nombreux exercices accompagnent chaque théorie : en cela M. Marie a suivi l'exemple des bons auteurs.

F.-A. Beynac,
Professeur.

Note du Rédacteur. Cette Arithmétique s'adresse principalement aux adeptes de la philosophie dite *positive;* le style, l'exposition, les méthodes, tout rappelle la manière du célèbre chef que cette école a récemment perdu. Une seule citation suffit pour donner une idée générale de l'esprit qui règne dans l'ouvrage. A propos de la soustraction, considérée comme opération *inverse* de l'addition, on lit (p. 13) :

« Plus généralement, deux fonctions, composées d'opé-
» rations en nombre plus ou moins considérable, sont
» inverses l'une de l'autre, lorsque le dernier résultat

» des opérations successives qui constituent la première
» de ces fonctions étant successivement soumis aux opé-
» rations qui entrent dans la seconde, la grandeur, quelle
» qu'elle soit, qui a éprouvé tous ces changements, revient
» à son état primitif. »

On voit bien que ces Leçons ne sont pas destinées à des commençants. Nous adhérons complétement à ce qu'on lit dans la préface, que l'algèbre, cette arithmétique universelle, facilite l'intelligence et l'enseignement de l'arithmétique chiffrée.

LOGARITHMORUM VI DECIMALIUM NOVA TABULA BEROLINENSIS, et numerorum vulgarium ab 1 usque ad 100000, et functionum trigonometricarum ad decades minutorum secundorum; auctore *Carolo Bremiker*, dr. ph. Berolini, 1852. 1 volume in-8 : préface et introduction 82 pages, Tables 524 pages.

Ursinus, astronome danois, publia à Copenhague, en 1827, des Tables de logarithmes à six décimales dont il a déjà été question dans les *Nouvelles Annales*, tome XVI, page 128. Ces Tables, à la fois correctes et commodes, présentaient cependant quelques inconvénients, que M. Bremiker a su éviter dans l'ouvrage qu'il a composé sur le même plan qu'Ursinus et dont nous allons rendre compte.

Nous donnerons d'abord une analyse de la préface de M. Bremiker. Cette préface, très-instructive, contient la description des Tables avec l'exposé raisonné des principes qui ont présidé à leur construction.

L'auteur fait d'abord remarquer que la grande habitude du calcul logarithmique peut seule faire apprécier les avantages et les défauts d'une Table; et c'est ce qui explique les imperfections de la plupart des Tables actuelles, dont la construction a été laissée à de simples théoriciens.

M. Bremiker prouve ensuite, comme l'avait déjà prouvé Ursinus, que six décimales sont suffisantes pour les besoins *ordinaires* de l'astronomie, puisqu'elles peuvent faire connaître les angles à un quart de seconde près, ce qui est assez pour le calcul des éphémérides, et à plus forte raison pour le calcul des observations astronomiques et géodésiques, et surtout pour les applications à la topographie et à la navigation.

Un des avantages de la suppression de la septième décimale dans les Tables usuelles, c'est de rendre dix fois plus petites les différences tabulaires. L'utilité de cette réduction des différences est surtout sensible dans les Tables trigonométriques, où il faut en même temps que l'argument croisse par intervalles assez rapprochés pour que les différences secondes n'exercent aucune influence. Taylor et, après lui, Bagay et Shortrede ont construit des Tables trigonométriques à sept décimales procédant de seconde en seconde. Mais on a été forcé, pour diminuer le volume de ces Tables, qui est encore resté très-considérable, de supprimer les différences et d'employer des moyens d'abréviation qui en rendent l'usage pénible. Il est donc préférable, lorsqu'on veut calculer avec sept décimales, d'employer des Tables procédant de 10 secondes en 10 secondes, comme celles de Gardiner ou de Callet. La grandeur des différences et leur variation rapide ne permettant pas d'insérer dans chaque page les parties proportionnelles des différences, on peut avoir recours avec beaucoup d'avantage à la Table construite exprès par M. Bremiker (*) ou aux grandes Tables de multiplication de Crelle (**).

(*) *Tafeln der proportionaltheile*. Berlin, bei Dümmler; 1843.

(**) *Rechentafeln*. Berlin; 1857. On les trouve chez Mallet-Bachelier, libraire.

Mais lorsque l'on ne conserve que six décimales, on peut, presque dès le commencement de la Table, écrire en marge les parties proportionnelles des différences, et c'est ce qu'a fait M. Bremiker à partir de 5 degrés. De plus, pour les Tables trigonométriques comme pour la Table des logarithmes des nombres, les parties proportionnelles sont données *exactement* avec une décimale, de sorte que l'interpolation peut se faire par leur moyen avec toute l'exactitude que comportent les Tables.

M. Bremiker a choisi, pour l'impression de ses Tables, le caractère elzevirien, que la typographie a malheureusement cessé d'employer depuis le commencement de ce siècle, et auquel nous espérons que l'on reviendra, comme semblent le prouver quelques tentatives heureuses faites dans ces derniers temps en France et en Angleterre. Ce caractère fatigue beaucoup moins la vue que le caractère moderne de hauteur uniforme, et les chiffres y sont beaucoup plus distincts les uns des autres (*).

Dans la disposition des pages, le but de l'auteur a été qu'une fois le livre ouvert à la page convenable, on puisse, sans avoir besoin de lire les chiffres, indiquer immédiatement l'endroit de la page qui répond à l'argument donné. Chaque page de la Table des logarithmes des nombres contient cinquante lignes au lieu de quarante comme dans les Tables d'Ursinus : de cette manière, l'ensemble de deux pages en regard contient exactement mille logarithmes. Cette disposition était déjà adoptée dans la plupart des Tables à sept décimales, telles que celles de Vega, de Babbage, etc.

Dans les Tables à sept décimales, on détache généra-

(*) *Voyez* la Note de M. Bailleul (*Bulletin bibliographique*, t. II. p. 155). Cette Note montre combien les chiffres français, qui ont conservé presque tous les avantages du caractère elzevirien, l'emportent pour la clarté sur les chiffres d'égale hauteur.

lement les trois premières figures communes à plusieurs logarithmes consécutifs, et que l'on écrit une fois pour toutes, en indiquant, s'il y a lieu, le changement de la troisième décimale dans le courant d'une même ligne soit par un signe particulier, tel qu'un astérisque, un chiffre de forme différente, etc., soit en brisant les lignes, comme l'a fait Callet. M. Bremiker a rejeté, avec beaucoup de raison selon nous, le moyen inventé par Callet. Mais peut-être le signe qu'il emploie dans le même but (un petit trait horizontal placé au-dessus du premier chiffre de chaque nombre de la ligne) n'est-il pas aussi distinct que l'astérisque dont se sert Vega. Il est vrai que l'emploi de ce signe est beaucoup plus rare que dans les Tables dont nous venons de parler, M. Bremiker ne détachant que deux chiffres au lieu de trois (*).

Les pages sont partagées en tranches de dix lignes par des filets placés au-dessus et au-dessous de chaque dixième ligne; les neuf lignes intermédiaires sont divisées par des blancs en groupes de trois. Nous ne saurions dire si cette disposition compliquée est plus avantageuse que la disposition plus simple, adoptée entre autres par Vega et Babbage, et qui consiste à séparer les lignes de cinq en cinq par des blancs, sans filets horizontaux, surtout si l'on fait ces blancs alternativement plus grands et plus petits comme dans les Tables de Shortrede.

Au bas de chaque page se trouvent deux petites Tables indiquant, pour deux échelles décuples l'une de l'autre, la conversion en degrés et minutes des nombres de la page considérée comme représentant des secondes. Il n'eût

---

(*) Ursinns détache trois chiffres et marque le changement du troisième, dans le courant d'une ligne, par une petit trait pareil à celui de M. Bremiker, mais placé seulement sur le premier zéro pour lequel le changement a lieu, ce qui peut donner lieu à de fréquentes erreurs.

pas été difficile d'y joindre les logarithmes des rapports

$$\frac{x}{\sin x}, \quad \frac{\tang x}{x},$$

qu'Ursinus donne en haut de chaque page, et qui sont utiles pour calculer les logarithmes des sinus et des tangentes des petits arcs.

A la fin de la Table des logarithmes des nombres est une Table de conversion réciproque des logarithmes vulgaires et naturels.

Les Tables trigonométriques se composent de deux parties, dont l'une contient les logarithmes des sinus et des tangentes de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés. Jusqu'à 0° 20′, la disposition est la même que dans la partie correspondante des Tables de Callet. A partir de là, la Table est à double entrée, la première colonne à gauche donnant les dizaines de seconde, et les colonnes suivantes les unités. Pour que l'on puisse appliquer commodément à cette disposition la double graduation des Tables trigonométriques ordinaires, on a ajouté une onzième colonne marquée 10″ en haut et 0″ en bas, et formée en répétant à la fin de chaque ligne le premier nombre de la ligne suivante.

La seconde partie contient les logarithmes des sinus et des tangentes de 10 secondes en 10 secondes pour tous les degrés du quart de cercle. La disposition diffère peu de celle des Tables de Callet. Seulement, comme dans les Tables de Lalande et d'Ursinus, l'ordre des colonnes est

Sin.,	Tang.,	Cotang.	Cosin.,
Cosin.,	Cotang.,	Tang.,	Sin.

Cet ordre est plus symétrique que celui de Callet par rapport à la double graduation.

A partir de 5 degrés, on a placé en marge les parties

proportionnelles des différences. Pour des angles plus petits, on a plus d'avantage en recourant à la première partie de la Table ou aux moyens dont nous parlerons plus tard.

Le recueil est terminé par des Tables auxiliaires donnant la conversion des parties d'arc, soit en parties de rayon, soit en parties de jour, celle du temps sidéral en temps moyen et réciproquement, et enfin par une Table de nombres usuels avec leurs logarithmes.

M. Bremiker donne ensuite des détails sur les soins qu'il a pris pour assurer la correction de ses Tables. Il les a comparées d'abord avec le *Thesaurus logarithmorum* de Vega, et tous les logarithmes du *Thesaurus* dont les derniers chiffres sont 5000 ou diffèrent peu de 5000 ont été calculés de nouveau avec une plus grande précision. L'épreuve a été satisfaisante pour la Table des logarithmes des nombres, qui ont été chaque fois reconnus exacts. Mais il n'en a pas été de même pour les Tables trigonométriques, où Vega n'avait fait que reproduire, avec des corrections insuffisantes (*), les Tables de la *Trigonometria artificialis* de Vlacq. M. Bremiker a vérifié 125 logarithmes de ces Tables au moyen de la *Trigonometria britannica*. Sur ces 125 logarithmes, 44 seulement ont été reconnus exacts ; 58 étaient en erreur d'une unité sur la dernière figure, 18 de deux unités, 4 de trois unités, 1 de cinq unités. En estimant d'après la même proportion le nombre d'erreurs que doit con-

(*) Vega ne s'est pas même donné la peine de collationner ses Tables avec la *Trigonométrie britannique*, qui lui aurait fourni un contrôle immédiat de 15 minutes en 15 minutes, et même, pour le commencement de sa Table, de 36 secondes en 36 secondes. Ainsi les logarithmes du sinus et de la tangente de $0^{o}\ 15'$ sont en erreur d'une unité du dixième ordre, et *plus de la moitié* des logarithmes communs aux deux Tables sont dans le même cas.

tenir la Table entière, il en résulterait que sur les 68040 logarithmes qu'elle renferme 44050 doivent avoir besoin de correction.

Ces imperfections des Tables à dix décimales, où la dernière décimale est toujours incertaine, ont produit un grand nombre d'inexactitudes dans les Tables à sept décimales que nous possédons, lesquelles ne sont en général que des éditions abrégées des anciennes Tables de Vlacq (*). De toutes ces éditions, la plus exacte est celle de Gardiner (1742), qui a pris, il est vrai, ses logarithmes dans les Tables de Vlacq, mais après les avoir corrigés avec le plus grand soin par la comparaison des différences (**) ; et si l'on collationne les Tables de Gardiner avec celles de Taylor, comparées un demi-siècle plus tard (1792), on trouve que dans les cas assez nombreux où les deux auteurs sont en désaccord, c'est toujours le nombre donné par Gardiner qui est le vrai. Les Tables de Callet n'étant, pour la partie principale, qu'une reproduction de celles de Gardiner, participent naturellement à leur exactitude. Mais il faut en excepter la partie calculée par Callet lui-même, c'est-à-dire celle qui contient les logarithmes des sinus et des tangentes de seconde en seconde pour le cinquième degré. M. Bremiker a reconnu dans

---

(*) Pour n'en citer qu'un exemple, on trouve dans les Tables de Vega (Leipzig, tirage de 1854) log tang $7^{\circ} 59' = 9,1468850$ au lieu de $9,1468849$. Cette faute provient d'une erreur de deux unités commise par Vlacq sur la dixième décimale ; les trois derniers chiffres sont 501 dans les Tables de Vlacq, tandis qu'ils devraient être 499.

(**) Si l'on forme le tableau des logarithmes des fractions $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$, d'après l'*Arithmetica logarithmica*, on aperçoit dans les différences secondes des irrégularités trop fortes pour qu'on puisse les attribuer à des erreurs de moins d'une unité sur la dernière figure, telles qu'on devrait en attendre si les logarithmes de x, de $\sin x$ et de $\operatorname{tang} x$ étaient tous approchés à moins d'une demi-unité près.

cette seule partie (tirage de 1821) plus de *mille* fautes sur la dernière décimale. En présence d'une telle assertion, il nous semblerait urgent qu'on procédât à une révision scrupuleuse de cette partie d'un recueil si justement estimé.

La Préface est suivie d'une Introduction où se trouve d'abord expliqué l'usage des Tables. Nous en extrayons seulement quelques remarques. Pour obtenir avec six décimales les logarithmes des sinus et des tangentes des arcs moindres que 5 minutes, on peut prendre simplement le logarithme de l'arc évalué en parties de rayon. Pour les arcs plus grands, jusqu'à 1 degré environ, on corrige cette valeur au moyen de la formule de Maskeline

$$\sin x = x\sqrt[3]{\cos x} + \frac{x^5}{4^5} + \ldots,$$

qui, réduite à son premier terme, donne

$$\sin x = x\sqrt[3]{\cos x}, \quad \operatorname{tang} x = \frac{x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$$

Dans la résolution d'un triangle rectiligne, donné par deux côtés et l'angle compris, il est avantageux, si l'on veut obtenir tous les autres éléments du triangle, d'employer les formules

$$a \sin \frac{1}{2}(B - C) = (b - c) \cos \frac{1}{2} A,$$

$$a \cos \frac{1}{2}(B - C) = (b + c) \sin \frac{1}{2} A,$$

analogues aux formules de Delambre ou de Gauss.

L'Introduction est terminée par un Mémoire sur les erreurs que l'on peut commettre dans le calcul logarithmique par suite de l'inexactitude des Tables, qui ne peuvent donner les logarithmes qu'à une demi-unité près du dernier ordre. Le calcul de l'erreur commise sur

une formule se réduit à une différentiation après laquelle on doit remplacer les différentielles des diverses quantités par des nombres quelconques compris entre les limites d'erreur dont ces quantités sont susceptibles. Si l'on prend ces nombres égaux aux limites supérieures des erreurs, on obtiendra une limite supérieure de l'erreur que l'on peut commettre sur la valeur de la formule.

Mais il s'en faut beaucoup que la limite supérieure ainsi déterminée puisse servir de guide dans les calculs pour évaluer l'approximation sur laquelle on est en droit de compter. En général, il s'établit entre les erreurs partielles une compensation qui atténue beaucoup l'erreur définitive.

Pour obtenir une règle plus près de la pratique, il faut avoir recours au calcul des probabilités qui fait connaître la probabilité que l'erreur soit comprise entre deux limites données plus petite que la limite supérieure. Ne pouvant entrer ici dans aucun détail sur l'analyse de l'auteur, nous nous contenterons de citer un exemple à l'appui de ce que nous annoncions tout à l'heure; cet exemple donnera une idée de l'intérêt et de l'importance de ce genre de recherches.

Soit proposé de calculer par logarithmes le produit de vingt facteurs dont les logarithmes sont tous connus à moins d'une demi-unité près du dixième ordre. La limite supérieure de l'erreur que l'on pourra commettre sur le logarithme du produit sera $\frac{1}{2} \times 20$ ou 10 unités du dixième ordre. Mais il ne faut par croire que 10 représente l'erreur que l'on aura à craindre en général. Si l'on calcule les probabilités que les erreurs soient comprises entre les intervalles 0 et 1, 1 et 2, 2 et 3 etc., on trouve les résultats suivants où les probabilités sont évaluées en vingtièmes d'unité :

Intervalles.	Probabilités.
0 — 1	11,172
1 — 2	6,388
2 — 3	2,050
3 — 4	0,356
4 — 5	0,032
5 — 6	0,002
6 — 10	0,000

En calculant maintenant vingt sommes, chacune de vingt logarithmes consécutifs, pris dans le commencement de la Table, l'auteur a trouvé pour les nombres d'erreurs correspondants à chacun des intervalles précédents :

0 — 1	13
1 — 2	4
2 — 3	2
3 — 4	1

En comparant ces nombres aux probabilités données ci-dessus, on trouve un accord surprenant, eu égard au petit nombre des épreuves qui ont donné ces résultats.

La probabilité que l'erreur soit comprise entre 9 et 10 est égale à l'unité divisée par le nombre

2 432 900 000 000 000 000.

Ce Mémoire est terminé par une application des formules pour le calcul de l'erreur probable, à divers problèmes de trigonométrie sphérique et par des remarques sur l'utilité de ce calcul dans le choix des formules (*).

Nous espérons que cet aperçu suffira pour faire comprendre les qualités précieuses de cet excellent ouvrage, et pour justifier la grande réputation dont il jouit en Allemagne.

Houel, Professeur.

(*) Toute méthode pratique d'approximation est *borgne* quand on ne sait pas calculer l'erreur probable. Tm.

Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et sur les surfaces isothermes; par M. *Lamé*, membre de l'Institut. In-8 avec figures dans le texte; 1857. Prix : 5 francs. (Chez Mallet-Bachelier.)

Un grand nombre de questions de mécanique, de géométrie et d'analyse conduisent aux transcendantes elliptiques et à leurs fonctions inverses. Le développement de cette branche importante de l'analyse a été lent et pénible. Maclaurin, d'Alembert, Fagnano, Euler, Lagrange et Landen s'en sont occupés les premiers (*). L'infatigable Legendre a passé la plus grande partie de sa vie à l'étendre et à la perfectionner. Enfin Abel et Jacobi, par leurs remarquables travaux, ont achevé de couronner cet édifice élevé avec tant de peine.

Après tant d'efforts multipliés, après tant de difficultés vaincues, il a fallu songer à réunir en corps de doctrine tous les résultats disséminés dans les journaux et les collections scientifiques. A la vérité, nous possédons depuis longtemps le grand Traité de Legendre et les *Fundamenta nova* de Jacobi. Le premier de ces ouvrages, malgré les suppléments qui sont dans le troisième volume, est insuffisant, et le second est d'une lecture si difficile, qu'il rebute la plupart des personnes qui en entreprennent l'étude. Pour rédiger ce cours de trigonométrie des fonctions elliptiques, il semble que la méthode la plus naturelle et peut-être la plus simple devait être celle qui avait fait inventer leurs diverses propriétés, c'est-à-dire la méthode analytique. M. Lamé a préféré suivre une autre voie : la théorie de la chaleur sert de base à son exposition. Cette application des *mathématiques appli-*

(*) Cherchant à évaluer l'aire du cylindre oblique, Pascal fait emploi de fonctions appelées depuis *elliptiques*. Tm.

quées à l'analyse pure simplifie singulièrement l'étude des transcendantes et des fonctions elliptiques de première espèce. Les surfaces isothermes, inventées par M. Lamé, donnent une représentation très-simple de ces transcendantes et de ces fonctions. Les trois variétés de transcendantes elliptiques de première espèce sont exprimées par les températures relatives aux trois surfaces homofocales du second ordre, et leurs fonctions inverses sont les axes mêmes de ces surfaces. C'est en traitant le problème de l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux que M. Lamé a été conduit à ces résultats. C'est pour la première fois que, dans une question de physique mathématique, on soit arrivé aux transcendantes elliptiques. Le lecteur jugera aisément avec quelle habileté et quelle persévérance le savant académicien à poursuivi ses recherches sur ce terrain qui lui appartient tout entier. Le service rendu à l'analyse est considérable; car l'étude des fonctions elliptiques est rendue accessible à un plus grand nombre de personnes. D'ailleurs, maintenant que l'élan est donné, nous aimons à croire que nous verrons paraître avant longtemps sur le même sujet un traité fondé sur l'analyse pure. Quoi qu'il arrive, l'ouvrage de M. Lamé restera toujours comme un livre original et d'une extrême simplicité.

Il nous reste maintenant à en donner une idée très-sommaire. L'auteur, après avoir exposé les notions nécessaires sur la théorie des surfaces isothermes, s'occupe spécialement des cylindres elliptiques et hyperboliques, ainsi que des surfaces de révolution du second ordre. Il trouve pour les fonctions inverses de ces surfaces les six lignes trigonométriques ordinaires et les six lignes trigonométriques hyperboliques ou fonctions exponentielles. La même étude fait trouver successivement toutes les transcendantes du calcul intégral ordinaire, c'est-à-dire

toutes celles qui s'intègrent par des arcs de cercles ou par des logarithmes. L'auteur aborde ensuite les surfaces homofocales du second ordre dans le cas général; il arrive à des transcendantes et à des fonctions inverses dont les précédentes ne sont que des cas particuliers. Les propriétés bien connues des fonctions trigonométriques et exponentielles font prévoir la plupart de celles des nouvelles fonctions. Ainsi les fonctions trigonométriques ayant une période réelle et les fonctions exponentielles une période imaginaire, les fonctions elliptiques posséderont la double périodicité. On aura pareillement les règles de l'addition et de la multiplication. Enfin les sinus et les cosinus forment diverses séries propres à représenter une fonction arbitraire entre certaines limites de la variable; de même les fonctions elliptiques de première espèce serviront à former des séries plus générales. Toutes ces questions sont traitées avec la lucidité qui caractérise l'éminent professeur et d'une manière aussi élémentaire que le comporte le sujet. Il y a trois questions principales savoir : les formules d'addition d'Euler, la double périodicité des fonctions inverses et la multiplication des transcendantes d'Abel, et enfin le problème épineux de la transformation de Jacobi. Les limites dans lesquelles nous sommes obligé de rester ne nous permettent point de donner une idée de tout ce qu'il y a de neuf et d'original dans ce livre. D'ailleurs une analyse, fût-elle très-développée, serait toujours insuffisante, vu le nombre et la variété des détails. Le lecteur n'a rien de mieux à faire que de recourir à l'ouvrage lui-même. Nous nous contenterons de faire une ou deux remarques. En trigonométrie, on sait qu'on considère plusieurs fonctions, bien qu'on puisse les exprimer toutes au moyen d'une seule. De même M. Lamé considère neuf fonctions elliptiques et démontre en quelque sorte la nécessité de

les maintenir séparément, malgré les relations qui permettraient de les exprimer à l'aide de trois d'entre elles. A ces neuf fonctions correspondent neuf autres fonctions qui leur sont conjuguées. Ainsi en tout il y a dix-huit fonctions réparties en plusieurs groupes; pour les distinguer entre elles, on leur a donné des noms particuliers. Nous recommandons les tracés graphiques analogues à ceux qu'on fait pour les lignes trigonométriques; ils sont très-utiles pour fixer dans la mémoire les propriétés des fonctions elliptiques. L'ouvrage se termine par des applications à la théorie de la chaleur; dans cette partie se trouvent réunis tous les développements relatifs aux séries de Fourier, de Laplace et de M. Lamé. Ce livre, comme toutes les productions du géomètre que Jacobi appelait *un des mathématiciens les plus pénétrants*, a un cachet caractéristique. Qu'il nous soit permis, en terminant, de concevoir l'espérance que l'auteur des *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* donnera prochainement au monde savant un autre ouvrage traitant d'une manière générale des *coordonnées curvilignes* et des *coordonnées elliptiques*, en suivant l'ordre des idées qui les ont fait découvrir et non l'exposition synthétique adoptée dans tous les écrits qui ont paru sur ce sujet. Ce sera un nouveau service rendu aux sciences.

Enfin ne serait-il pas à désirer, maintenant que l'importance des fonctions elliptiques est reconnue de tout le monde, ne serait-il pas à désirer qu'on eût des Tables pour ces fonctions comme on en a pour les fonctions trigonométriques ordinaires et hyperboliques (*)? On ne verrait plus si souvent cette phrase banale : *le problème étant ra-*

(*) M. Hermite vient d'exprimer les racines des équations du cinquième degré en fonctions elliptiques, premier pas immense. TM.

mené aux quadratures, il est considéré comme résolu. Espérons que l'Académie des Sciences, à qui revient toute initiative de ce genre, fera exécuter ce long travail, sous la direction de quelques-uns de ses membres.

J. GARLIN.

TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES A L'AIDE DE LA THÉORIE DES POLAIRES RÉCIPROQUES; par M. *A. Mannheim*, lieutenant d'artillerie. In-8 avec figures dans le texte; 1857. Prix : 2fr 50c, chez *Mallet-Bachelier*, libraire.

Les propriétés des figures se divisent en deux classes : les propriétés *descriptives* où l'on ne tient compte que de la situation des lignes les unes à l'égard des autres et les propriétés *métriques* où l'on s'occupe de la grandeur des segments et des angles.

Lorsque l'on transforme une figure par un procédé métamorphique, l'on obtient une autre figure qui doit nécessairement, quoique sous une autre forme, rappeler les propriétés de la première. La transformation d'une propriété purement descriptive est en général facile; il n'en est pas de même des propriétés métriques. Voici ce que dit à ce sujet l'auteur de la *Géométrie supérieure* relativement aux transformations homographiques et corrélatives (p. 614). « L'application des deux méthodes est
» toujours facile en ce qui concerne les relations descrip-
» tives des figures, mais il n'en est pas de même des rela-
» tions métriques, soit des segments, soit des angles : ces
» relations pouvant présenter beaucoup de difficultés *ou*
» *se refuser même à la transformation.* »

M. Mannheim, prenant pour base de ses transformations la théorie des polaires réciproques, rappelle les travaux de MM. Poncelet, Chasles, etc., sur le même sujet,

puis énonce ainsi la question qu'il se propose de résoudre : *Transformer à l'aide de la théorie des polaires réciproques une relation métrique sans lui faire subir aucune préparation. Déterminer immédiatement les différentes formes sous lesquelles se serait présentée la relation transformée si l'on avait opéré sur différentes formes de la relation donnée.*

L'auteur adopte pour courbe directrice un cercle d'un rayon égal à l'unité linéaire, de cette manière il transforme immédiatement les relations angulaires, puisque l'angle de deux droites est égal à l'angle des droites qui vont du centre du cercle directeur aux pôles des droites. Les relations métriques de distances se transformeront à l'aide du théorème suivant : *Le rayon de la circonférence directrice est moyen proportionnel entre la distance du centre au pôle et à la polaire.*

On parvient à une relation fondamentale (1) qui, modifiée de différentes manières, donne une série de formules placées dans un tableau général (p. 56).

Dans les articles I, II, III, IV, on transforme la distance d'un point à une droite, la propriété du carré de l'hypoténuse, ce qui conduit à plusieurs théorèmes intéressants. De la relation $ab + bc = ac$, qui a lieu entre trois points situés en ligne droite, on déduit celle qui existe entre quatre points d'une droite ou d'un cercle, etc.

La même égalité conduit (article IV) à différentes formes du rapport anharmonique et des divisions homographiques.

L'article V, *systèmes de coordonnées,* donne des formules pour trouver l'équation de la polaire réciproque d'une courbe donnée, que cette courbe soit considérée comme lieu géométrique d'un point ou comme l'enveloppe d'une droite. L'article suivant traite de la trans-

formation de démonstration; il a pour but de faire voir que connaissant la démonstration analytique ou géométrique d'un théorème, on obtiendra celle du théorème polaire en transformant successivement les différentes équations qui ont conduit à la démonstration du premier. On applique cette méthode à divers exemples.

M. Chasles, dans la *Géométrie supérieure*, explique pourquoi il n'a pas fait usage dans le cours de son ouvrage des méthodes de transformation, et voici la principale raison qu'il en donne (p. 608). « Par les méthodes » de transformation, on fait un théorème déterminé avec » un autre déjà connu. On peut former ainsi une collec» tion plus ou moins ample de propositions. Mais ces » propositions sont en quelque sorte isolées; elles man» quent de liens entre elles; on ne saurait les déduire les » unes des autres, lors même qu'on voit qu'elles se rappor» tent à une même théorie, etc. » Nous pensons cependant, avec l'auteur du Mémoire, que si l'on peut dans un système métamorphique déterminé, transformer la longueur d'un segment pris isolément (c'est le problème le plus difficile de ce genre de recherche), on pourra par ce seul fait non-seulement transformer une propriété d'une figure, mais encore parvenir à la démonstration directe du théorème auquel on arrive. De sorte que si l'on a une série de propositions A, B, C, etc., liées les unes aux autres de manière à former une théorie, les propositions transformées A', B', C', etc., auront aussi entre elles un certain enchaînement qu'il sera bien facile d'apercevoir (introduction, XVIII).

Dans la chapitre VII, on donne différentes expressions de l'aire d'un triangle; il suffit à l'auteur de transformer la base et la hauteur du triangle donné pour obtenir la relation cherchée.

L'ouvrage de M. Mannheim traite principalement des

transformations dans les figures planes, cependant dans le dernier article on donne différentes expressions de l'aire d'un triangle dans l'espace et du volume d'un tétraèdre, en prenant pour surface directrice une sphère.

FAURE.

LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE, *entièrement* conformes aux *nouveaux Programmes* de l'enseignement des lycées, contenant *toutes* les connaissances *nécessaires* à ceux qui se destinent au Baccalauréat ès Sciences, aux Ecoles spéciales du gouvernement, à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures et à ceux qui suivent les cours des écoles professionnelles et des nouvelles Facultés des Sciences appliquées; par MM. *Henri Harant*, licencié ès Sciences, et *Pierre Laffitte*, professeur de mathématiques. In-8 de XI-369 pages, avec 195 figures intercalées dans le texte et une planche in-8.

La *Mécanique* renferme deux parties distinctes : 1° la *phoronomie*; 2° la *mécanélogie*.

1°. *Phoronomie*. Les lois qui régissent ces causes mystérieuses agissant sans intermédiaire connu et désignées sous le nom de *forces*, constituent la *phoronomie*. Telles sont les attractions astronomiques, physiques, chimiques, électriques, magnétiques, thermiques, etc., causes du mouvement, que Kepler désigne sous le nom poétique et très-expressif *âme*. En effet, ces causes agissent comme l'âme sans qu'on puisse savoir le *comment*. Toute la nature est gouvernée par la phoronomie. L'étude des lois émanées du modérateur des mondes est le but de cette science, et, comme toute science, elle est fondée sur des principes qui ne font pas partie de la science, qui ne sont pas démontrables. Il faut donc bien se garder de recourir à l'expérience pour y trouver la démonstration. Recourir

à l'*empirisme*, c'est détruire la certitude. Aristote dans ses *Analytiques* donne ces avertissements si logiques :

Ου δεῖ ἐν ταῖς ἐπιστημονικαῖς ἀρχαις ἐπιζητεῖσθαι τὸ διὰ τι.

« Dans les premiers principes, on ne doit pas demander le pourquoi. »

Il ajoute :

Τὰ μὴ δι ἑτέρων ἀλλὰ δἰ αὑτῶν ἔχωντα τὴν πίστιν.

« Ils ne tiennent pas leur certitude d'ailleurs, mais d'eux-mêmes. »

Ἀποδειξεως ἀρχὴ ουκ ἀποδειξις.

« Le *principe* de la *démonstration* n'est pas une *démonstration.* »

On oublie trop souvent ces sages avertissements.

2°. *Mécanélogie.* Cette partie de la science s'occupe de forces agissant par l'intermédiaire de corps qui prennent alors le nom de *machines*. Tels sont les divers leviers, le plan incliné, vis, treuils, etc. On y fait bien usage des doctrines phoronomiques, mais la mécanélogie n'est pas la phoronomie, pas plus que l'arpentage n'est la géométrie, quoiqu'on y fasse emploi de la géométrie. Le but de la mécanélogie est de produire certains effets, d'obtenir certains résultats matériellement *utiles*. Le but est un intérêt lucratif. On comprend que dans un siècle où l'esprit du *gain* s'est emparé de tous les esprits, où toutes les aspirations, locution ascétique très en vogue chez nos épicuriens, tendent vers le bien-être que procure la richesse, on comprend comment la mécanélogie est parvenue à occuper la première place et à pousser la phoronomie sur le second plan.

La mesure de la force n'est pas la même dans les deux parties de la science. La phoronomie ne considère et n'a besoin de considérer que la masse et la vitesse ; dès lors la mesure de la force est naturellement indiquée par le

produit de ces deux facteurs, très-bien désigné sous le nom de *quantité de mouvement*. Dans la mécanélogie cela ne suffit pas; là, on veut connaître le *bénéfice*, ce que produit la force; c'est ce bénéfice qu'on nomme *quantité de travail;* il est la moitié d'un certain produit que Leibnitz a malheureusement baptisé sous le nom de *force vive*, quoiqu'il n'y ait dans cette multiplication ni vitalité, ni force; le mot étant généralement admis, ce serait un inconvénient de le supprimer. Ce sont quatre syllabes dont les sons rappellent un certain produit La quantité de travail possède cet avantage important de pouvoir être rendue manifeste par des appareils dynamométriques.

Les nouveaux programmes contiennent trente-deux questions. MM. Harant et Laffitte élucident et résolvent ces questions l'une après l'autre.

L'ouvrage est divisé en trois parties: 1° mouvement (1-94); 2° des forces et de leurs effets (95-199).

Les auteurs attribuent aux corps une *activité propre* et nient l'inertie, c'est-à-dire l'incapacité de la matière à se mouvoir d'elle-même (*voir* la note à la fin). Je ne sais ce que les docteurs de l'ancienne Sorbonne auraient pensé d'une telle assertion. Les corps ne peuvent agir les uns sur les autres par le choc, puisque tout contact entre molécules est impossible; ils agissent, selon Boscowich, comme par attraction positive et négative et à distance. La communication de mouvement se fait, on ne sait comment, de molécule à molécule, et, jusqu'à ce que toutes les molécules soient atteintes, il s'écoule un certain temps; c'est ce temps qui est l'origine des idées embrouillées sur la force d'inertie.

3°. *Des machines* (202-361). C'est la partie la plus instructive et la plus intéressante. Les figures sont bien faites et les explications très-claires. On y donne des applications aux diverses machines industrielles aujour-

d'hui existantes. Tout ce qui concerne la *vapeur* est mis à la portée des gens du monde instruit.

Au résumé, il faut savoir ce que l'on veut. Voulez-vous vous préparer à un examen universitaire, industriel quelconque, devenir contre-maître, directeur d'usines, manufactures, etc., lisez la *Mécanélogie* de MM. Harant et Laffitte. Voulez-vous apprendre la science, étudiez la *Mécanique* de Poisson, puis les Traités de MM. Delaunay, Duhamel, les *Exercices* de M. l'abbé Jullien et la *Mécanique moléculaire* de M. Lamé.

Note. La matière inerte, la matière avec volonté (animal), avec volonté intelligente (homme) sont trois catégories d'êtres séparées par des abîmes infranchissables. Les philosophes, constructeurs de ponts, ne manquent pas. Mais ce qui manque à ces philosophes, c'est la science précieuse de *savoir ignorer*, le *aliqua nescire* de Quintillien (lib. I, chap. V, *ad finem*).

PROSPECTUS JOANNIS KEPLERI ASTRONOMI OPERA OMNIA, edidit *Ch. R. Frisch*. Studgartiæ, mense Majo, 1857.

L'ouvrage paraîtra en huit volumes in-8; le prix de chaque volume ne dépassera pas 12 francs. Cette édition renfermera aussi la correspondance inédite déposée à l'observatoire de Pulkova.

Les principaux astronomes de l'Allemagne ont souscrit; il en sera sans doute de même dans les autres pays. On publiera la liste des souscripteurs.

ORIGINE DU MOT CALCULER.

Les Romains n'avaient pas l'infinitif *calculare*; ils disaient *calculos subducere*, ôter les cailloux. On sait que pour compter ils employaient soit des cailloux, soit probablement des billes de divers diamètres, de diverses couleurs, à l'instar des chapelets dont font usage les religieuses. Horace dit que dans son enfance il allait au collége portant des sachets remplis de cailloux. Il paraît qu'on ne lui ménageait pas les coups. Il appelle son maître *plagosus*. L'honnête et chaste Quintillien s'élève contre l'usage barbare de battre les élèves : *Cædi vero discentes, quamquam et receptum sit, et Chrysippus non improbet, minime velim* (lib. II, chap. IV).

Le mot *calculare* se trouve pour la première fois chez Aurelius Prudentius Clemens, poëte chrétien, né l'an 348 dans la province de Tarragone en Espagne [IIe livre de la *Couronne* (*Peristephanon*)].

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES

A DÉCERNER EN 1861

(voir t. III, p. 46).

Perfectionner en quelque point la théorie des polyèdres.

Le prix consiste en une médaille d'or de la valeur de 3000 francs.

Les Mémoires devront être rendus avant le 1er juillet 1861.

A DÉCERNER EN 1860.

« Plusieurs géomètres ont étudié le nombre des valeurs » que peut prendre une fonction déterminée de plusieurs » variables lorsqu'on y permute ces variables de toutes » les manières possibles. Il existe sur ce sujet des théo- » ries remarquables qui suffisent aux applications *de cette* » *théorie* à la démonstration de l'impossibilité de la ré- » solution par radicaux d'une équation de degré supé- » rieur à *quatre*; mais la question générale qu'il faudrait » résoudre serait la suivante :

« *Quels peuvent être les nombres des valeurs des fonc-* » *tions bien définies qui contiennent un nombre donné* » *de lettres, et comment peut-on former les fonctions* » *pour lesquelles il existe un nombre donné de valeurs?*

» Sans exiger des concurrents une solution complète, » qui serait sans doute bien difficile, l'Académie pour- » rait accorder le prix à l'auteur d'un Mémoire qui fe- » rait faire un progrès notable à cette théorie. »

Prix : Médaille d'une valeur de 300 francs.

Les Mémoires devront être remis avant le 1er juillet 1860, terme de rigueur (*Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, 8 février 1858, p. 301-302).

Note du Rédacteur.

Voir pour la *première* question *Nouvelles Annales*, t. II, p. 163, 486; t. VI, p. 480; t. VIII, p. 68, 132, 306; t. XIII, p. 299. *Journal de l'École Polytechnique*, CAUCHY, cahier XVI, p. 75, 1813; POINSOT, cahier X. *Savants étrangers*, t. II, POINSOT. *Compte rendu*, 11 janvier 1853, p. 65, POINSOT; BERTRAND, p. 79.

Pour la *seconde* question voir *Nouvelles Annales*,

t. XIV, p. 403, 408; SERRET, *Algèbre supérieure,* leçons XIe, XIXe, XXe; les travaux de Ruffini sont le point de départ (*voir* la liste de ces travaux dans la *Biographie* Michaud, article *Ruffini,* t. XXXIX, p. 278); ABEL, *Œuvres complètes;* LUTHER, *Journal* de Crelle; BETTI, *Annales* de Tortolini.

BIBLIOGRAPHIE.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, pubblicati da *Barnaba Tortolini,* professore di calculo sublime all'università di Roma; e compilati da *E. Betti* a Pisa, *F. Brioschi* a Pavia, *A. Genocchi* a Torino, *B. Tortolini* a Roma. (In continuazione agli *Annali di Scienze matematiche e fisiche.*) N° 1 (genn. et febbr. 1858). Roma, con tipi della S. C. de Propaganda Fide. In-4 de 56 pages; tome I.

Ces *Annales* font suite à celles des *Scienze matematiche* qui datent de janvier 1850 et s'arrêtent à décembre 1857. Le format a changé, mais ni le rédacteur ni les collaborateurs, heureusement. La première collection avait pour but de faire connaître au dehors les travaux des savants italiens; la seconde aura en outre pour mission de faire connaître en Italie les travaux extérieurs. Les noms qu'on lit ci-dessus sont une garantie que ce double but sera complétement atteint.

CONTENU.

I. HENRI BETTI. — *Mémoire sur les équations algébriques à plusieurs inconnues* (p. 1 à 8).

Étant données deux équations ayant une racine com-

mune, Abel a enseigné la manière de calculer une fonction symétrique de cette racine commune (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 81 et 272).

M. Betti donne la solution générale de cette question :

Étant données n + 1 *équations entre* n *inconnues, trouver les solutions communes.*

Soient

$$(1)\qquad f_0 = 0,\quad f_1 = 0,\quad f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$$

les $n+1$ équations entre les inconnues x_1, $x_2, \ldots, x_n$, f_0 est de degré m_0, f_1 est de degré m_1, f_2 est de degré m_2, et soient μ solutions communes à ces équations, moins à la première $f_0 = 0$, et

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} {}'\alpha_1,\quad {}'\alpha_2, \ldots,\quad {}'\alpha_n = s_1 \\ {}''\alpha_1,\quad {}''\alpha_2, \ldots,\quad {}''\alpha_n = s_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{\mu}\alpha_1,\quad {}^{\mu}\alpha_2, \ldots,\quad {}^{\mu}\alpha_n = s_\mu \end{array}\right.$$

La première seule s_1 représente une solution commune à toutes les $n+1$ équations.

On démontre ces trois théorèmes qui servent de lemmes.

1°. *Une fonction rationnelle et symétrique de* s_2, $s_3, \ldots, s_\mu$ *équivaut à une fonction rationnelle et entière de* s_1.

De même si l'on remplace s_1 par un s quelconque.

2°. *Une fonction rationnelle et entière de degré quelconque de* s_1 *équivaut à une fonction rationnelle et entière de toutes les quantités qui entrent dans le système* (2); *cette fonction contient un seul terme de degré* $m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n$, *et les autres termes sont de degrés inférieurs*.

Désignons par Δ le déterminant fonctionnel

$$\sum \pm \frac{df_1}{dx_1} \frac{df_2}{dx_2} \cdots \frac{df_n}{dx_n}.$$

3°. *Si* F_p *indique une fonction de* $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n}$ *rationnelle, entière et avec un seul terme de degré*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n,$$

et tous les autres termes de degré inférieur, et désignons par Δ_p *ce que devient le déterminant fonctionnel en y remplaçant* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par* $\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_n^p$, *alors le terme de degré le plus élevé dans* F_p *sera*

$$\sum_{p=1}^{p=\mu} \frac{F_p}{\Delta_p}.$$

Ces trois théorèmes fournissent la solution du problème où il s'agit de déterminer une fonction rationnelle quelconque de s_1, seule solution commune à toutes les $n+1$ équations, et le même procédé peut s'appliquer à plusieurs solutions communes, et l'auteur énonce sans démonstration les conditions nécessaires et suffisantes pour que $n+1$ équations aient t systèmes de solutions communes.

Le travail a le cachet de profondeur particulier à ce savant géomètre; la diversité et la multiplicité des indices rendent la lecture très-pénible.

II. François Brioschi. — *Note sur le développement d'un déterminant* (p. 9.-11).

Posons

$$a_{r,s} = \frac{1}{x_s - a_r}, \quad \alpha_{r,s} = \frac{1}{(x_s - a_r)^2},$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \alpha_{1,1}, & a_{2,1}, & \alpha_{2,1}, \ldots, & a_{n,1}, & \alpha_{n,1} \\ a_{1,2}, & \alpha_{1,2}, & a_{2,2}, & \alpha_{2,2}, \ldots, & a_{n,2}, & \alpha_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,2n}, & \alpha_{1,2n}, & a_{2,2n}, & \alpha_{2,2n}, \ldots, & a_{n,2n}, & \alpha_{n,2n} \end{vmatrix}$$

C'est ce déterminant de $4n^2$ termes qu'on développe ainsi que $\frac{dA}{da_{r,s}}$ et $\frac{dA}{d\alpha_{r,s}}$, le tout en fonction des x et des a.

III. F. Brioschi. — *Mémoire sur les fonctions abéliennes complètes* (p. 12-17).

$a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ sont $2n+1$ nombres réels différents entre eux et tels, qu'on a

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_{2n} < a_{2n+1}.$$

Posons

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3)(x - a_5) \ldots (x - a_{2n+1}),$$
$$Q(x) = A(x - a_2)(x - a_4) \ldots (x - a_{2n}),$$
$$R(x) = P(x) Q(x),$$

où

$$A > 0.$$

Soit

$$y = \frac{P(x)}{2(x - a_{2r-1})\sqrt{R(x)}};$$

l'aire d'une telle courbe prise entre des limites déterminées désignées par les a est une fonction abélienne; ainsi

$$K_{r,s} = \frac{1}{2}\int_{a_{2s-1}}^{a_{2s}} \frac{P(x)}{(x - a_{2r-1})\sqrt{R(x)}}\, dx$$

est une fonction abélienne de première espèce, et

$$L_{r,s} = \frac{1}{2}\frac{Q(a_{2r-1})}{P'(a_{2r-1})}\int_{a_{2s-1}}^{a_{2s}} \frac{P(x)}{(x - a_{2r-1})^2\sqrt{R(x)}}\, dx$$

est une fonction abélienne de deuxième espèce.

Si l'on pose

$$n = 1,$$

on a les quatre fonctions elliptiques.

L'auteur cite un certain déterminant Δ dont les élé-

ments sont des fonctions abéliennes, et il parvient au résultat curieux

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n,$$

et, pour les fonctions elliptiques,

$$\Delta = \frac{\pi}{2}.$$

Résolution des équations transcendantes; par M. *A. Stern*. Traduit de l'allemand par M. *E. Lévy*, agrégé des Sciences. Paris, 1858. In-8 de 85 pages.

En littérature, de judicieuses entraves tendent, doublent les ressorts du génie. Ainsi, au XVIIe siècle, la sévère observation des règles de la grammaire, des préceptes du goût, des lois du rhythme et de l'harmonie dans les vers, des trois unités au théâtre ont produit des chefs-d'œuvre. Nous nous sommes débarrassés de ces entraves, où sont nos chefs-d'œuvre? Il en est ainsi dans les sciences exactes. Les anciens s'étaient astreints à n'employer d'autres lignes que la droite et le cercle, d'autres instruments que la règle et le compas, et ils nous ont légué des chefs-d'œuvre : Euclide, Archimède, Apollonius. On peut rapporter à la même cause Huyghens, Newton; aux deux lignes, droite et cercle, se rattachent des idées vraies de beauté et des idées chimériques de perfection auxquelles les anciens tenaient avec une ténacité religieuse.

Toutefois ils s'apercevaient que pour des questions qui exigeaient des extractions de racines cubique et quatrième, il fallait absolument d'autres lignes, et ils eurent recours aux coniques, à la conchoïde, à la cissoïde, etc. Archimède considéra même la spirale, une de ces courbes

qu'une droite coupe en une infinité de points et qu'on a nommée depuis *transcendante*, comme dépassant les limites de la géométrie ordinaire. Le célèbre problème de Kepler (*) où il s'agit d'une relation entre un arc de cercle et sa corde (ou sinus) a donné l'idée des *fonctions transcendantes circulaires*, de même que la relation entre un arc d'ellipse et sa corde a créé les transcendantes elliptiques, et beaucoup d'autres du genre analogue. Les racines des équations du deuxième, troisième et quatrième degré peuvent s'exprimer soit par des radicaux, soit par des transcendantes circulaires; mais Abel a démontré que l'équation générale du cinquième degré ne peut plus se résoudre par des combinaisons de radicaux, et M. Hermite vient de publier l'importante découverte que cette résolution peut s'obtenir par des transcendantes elliptiques. Il devient très-probable que la résolution générale des équations de degré supérieur au cinquième dépend aussi de certaines transcendantes; c'est la besogne de l'avenir, d'autant plus importante, que les applications aux sciences physiques mènent presque toujours à des équations transcendantes. La loi mathématique de l'attraction est probablement une fonction de ce genre dont nous ne connaissons que le premier terme de son développement en série décroissante. L'étude soignée des équations transcendantes est une heureuse innovation de l'enseignement actuel. En 1837, l'Académie de Copenhague a mis au concours la résolution de ces équations. Le Mémoire de M. le D[r] Stern a été couronné, et nous en avons déjà rendu un compte suffisamment étendu (t. XIV, p. 384, 388).

Cette traduction claire, exacte, faite avec intelligence, comble une lacune. Les procédés de Rolle et de Newton

---

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 303.

deviennent insuffisants pour les équations transcendantes, et tout à fait impraticables pour les racines imaginaires. M. Stern fait emploi du théorème de Fourier, et M. Lévy a eu le bon esprit, guidé par les précieux conseils de M. Gerono, de faire précéder sa traduction d'une exposition de ce théorème, ce qui facilite singulièrement la lecture de l'ouvrage, et le fera sans doute bien accueillir par les professeurs et les élèves.

M. Mathète, professeur au lycée de Clermont, nous a envoyé un Mémoire bien travaillé, contenant un moyen de rendre plus pratique la méthode Stern et la résolution des équations numériques en général. Nous en parlerons dans les *Nouvelles Annales*.

NOTE

Ayant pour objet de signaler des erreurs nombreuses qui existent dans les Tables de Logarithmes de Callet.

Des études sur les logarithmes, entreprises individuellement et à des points de vue divers, par M. Lefort, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, et par M. Hoüel, docteur ès Sciences, les ont conduits à reconnaître de nombreuses incorrections dans des Tables de Logarithmes fort répandues, et même dans les Tables de Briggs et de Vlacq, que l'on peut appeler fondamentales, car elles ont servi de base à la plupart des Tables modernes, quand ces dernières n'en étaient pas de simples extraits. L'objet de cette Note est de signaler, aux éditeurs et aux savants, les erreurs contenues dans la dernière partie de la Table des logarithmes des nombres de Callet.

Errata de la Table des Logarithmes des nombres de 1 à 108 000. Partie à 8 décimales.

Nota. — Les erreurs portent toutes sur la 8e décimale, qui est tantôt trop faible, tantôt trop forte.

NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.
102 101	2999	3000	102 601	60	59	103 137	50	49
107	555 (1)	2	605	3	2	188	20	19
113	3	4	623	0	1	220	6	5
117	4	5	689	3	2	294	09	10
141	0	1	699	2	1	311	6	7
147	1	2	707	5	4	369	2	1
153	2	3	713	2	1	377	3	2
161	3	4	723	70	69	417	3	4
173	4	5	739	4	3	430	3	2
243	9	8	743	5	4	438	2	1
247	8	7	749	1	0	444	0	1
251	7	6	755	7	6	450	49	50
255	6	5	761	3	2	511	1	0
265	3	2	763	8	7	558	6	5
271	1	0	771	9	8	583	8	9
279	8	7	773	4	3	587	5	6
287	5	4	784	2	1	605	1	2
289	4	3	785	5	4	618	0	1
291	3	2	787	20	19	642	8	9
323	7	6	789	5	4	643	7	8
325	6	5	791	10	09	644	6	7
327	5	4	793	5	4	659	2	1
335	20	19	795	200	199	668	.	2
337	9	8	797	5	4	674	5	6
343	5	4	809	4	3	690	8	7
349	1	0	811	9	8	731	7	6
355	7	6	813	4	3	734	3	2
359	4	3	821	3	2	737	9	8
375	2	1	829	2	1	740	5	4
380	2	3	835	6	5	764	0	1
385	4	3	839	5	4	834	9	8
391	9	8	845	9	8	838	2	1
465	5	4	849	8	7	852	7	6
471	8	7	853	7	6	865	2	3
476	6	7	857	6	5	873	8	7
481	6	5	867	8	7	887	0	1
497	6	5	873	1	0	910	5	4
500	6	7	879	4	3	944	2	3
507	3	2	887	1	0	949	1	2
513	5	4	927	2	1	979	3	4
518	2	3	939	5	4	996	3	4
521	4	3	969	49	50	999	.	6
529	3	2	973	6	7	104 070	6	5
531	20	19	977	3	4	093	2	3
533	7	6	991	8	7	098	8	9
565	9	8	103 000	3	2	103	4	5
567	6	5	008	5	6	179	9	8
569	3	2	018	.	1	197	1	2
577	5000	4999	028	.	7	202	6	5
585	7	6	029	9	8	228	1	0
591	7	6	128	59	60	316	2	3

NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.
104 329	5	4	105 294	3	2	105 946	7	6
333	69	70	296	8	7	956	6	5
337	4	5	308	7	6	964	5	4
346	0	1	313	9	8	965	5	4
384	3	4	318	1	0	985	1	0
385	09	10	324	5	4	989	80	79
506	2	3	327	2	1	993	9	8
531	0	1	344	1	0	106 013	3	2
547	7	8	352	9	8	016	2	1
552	5	4	373	5	4	024	9	8
569	6	5	381	1	2	034	5	4
579	9	8	432	5	4	041	2	1
583	09	10	442	4	3	065	09	10
587	0	1	456	30	29	069	8	7
606	59	60	466	8	7	076	4	3
612	0	1	475	4	3	086	8	7
629	8	7	481	3	4	094	3	2
698	8	9	482	5	6	117	7	6
708	7	6	501	7	8	141	8	7
744	6	5	524	4	5	147	3	2
759	5	4	533	9	8	155	6	5
791	9	8	535	2	1	165	7	6
803	2	1	537	5	4	166	6	5
808	4	3	539	8	7	203	9	8
811	7	6	541	1	0	204	8	7
841	6	5	543	4	3	214	7	6
855	5	4	545	7	6	222	8	7
876	2	1	547	90	89	228	1	0
888	1	0	579	5	4	248	7	6
889	5	4	582	9	8	252	2	1
915	9	8	585	3	2	259	3	2
916	3	2	595	6	5	269	60	59
917	7	6	611	6	5	272	6	5
928	40	39	621	8	7	275	2	1
943	7	8	680	1	0	283	1	0
949	1	0	681	2	1	293	7	6
959	9	8	682	3	2	328	5	4
963	4	3	683	4	3	353	5	4
971	4	3	702	1	0	372	3	2
105 024	5	6	715	2	1	383	4	3
026	2	3	729	3	2	388	5	4
028	09	10	733	6	5	398	7	6
034	1	0	737	9	8	404	6	5
057	500	499	762	6	5	411	3	2
065	7	6	782	8	7	420	6	5
074	6	7	784	9	8	433	1	0
091	3	2	817	5	4	434	9	8
116	2	3	827	9	8	435	7	6
144	50	49	835	2	1	436	5	4
166	5	6	838	3	2	453	1	0
167	8	9	841	4	3	454	9	8
197	6	5	858	9	8	455	7	6
213	1	0	862	10	09	456	5	4
217	2	1	866	1	0	457	3	2
255	3	4	881	4	3	486	2	1
265	400	399	887	5	4	510	9	8
272	8	7	895	6	5	521	4	3
274	3	2	905	7	6	557	9	8

Errata de la Table des Logarithmes des nombres de 1 à 108 000. Partie à 8 décimales.

Nota. — Les erreurs portent toutes sur la 8e décimale, qui est tantôt trop faible, tantôt trop forte.

NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.
102 101	2999	3000	102 601	60	59	103 137	50	49
107	555 (1)	2	605	3	2	188	20	19
113	3	4	623	0	1	220	6	5
117	4	5	689	3	2	294	09	10
141	0	1	699	2	1	311	6	7
147	1	2	707	5	4	369	2	1
153	2	3	713	2	1	377	3	2
161	3	4	723	70	69	417	3	4
173	4	5	739	4	3	430	3	2
243	9	8	743	5	4	438	2	1
247	8	7	749	1	0	444	0	1
251	7	6	755	7	6	450	49	50
255	6	5	761	3	2	511	1	0
265	3	2	763	8	7	558	6	5
271	1	0	771	9	8	583	8	9
279	8	7	773	4	3	587	5	6
287	5	4	784	2	1	605	1	2
289	4	3	785	5	4	618	0	1
291	3	2	787	20	19	642	8	9
323	7	6	789	5	4	643	7	8
325	6	5	791	10	09	644	6	7
327	5	4	793	5	4	659	2	1
335	20	19	795	200	199	668	.	2
337	9	8	797	5	4	674	5	6
343	5	4	809	4	3	690	8	7
349	1	0	811	9	8	731	7	6
355	7	6	813	4	3	734	3	2
359	4	3	821	3	2	737	9	8
375	2	1	829	2	1	740	5	4
380	2	3	835	6	5	764	0	1
385	4	3	839	5	4	834	9	8
391	9	8	845	9	8	838	2	1
465	5	4	849	8	7	852	7	6
471	8	7	853	7	6	865	2	3
476	6	7	857	6	5	873	8	7
481	6	5	867	8	7	887	0	1
497	6	5	873	1	0	910	5	4
500	6	7	879	4	3	944	2	3
507	3	2	887	1	0	949	1	2
513	5	4	927	2	1	979	3	4
518	2	3	939	5	4	996	3	4
521	4	3	969	49	50	999	.	6
529	3	2	973	6	7	104 070	6	5
531	20	19	977	3	4	093	2	3
533	7	6	991	8	7	098	8	9
565	9	8	103 000	3	2	103	4	5
567	6	5	008	5	6	179	9	8
569	3	2	018	.	1	197	1	2
577	5000	4999	028	.	7	202	6	5
585	7	6	029	9	8	228	1	0
591	7	6	128	59	60	316	2	3

[Suite.]

NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.
104 329	5	4	105 294	3	2	105 946	7	6
333	69	70	296	8	7	956	6	5
337	4	5	308	7	6	964	5	4
346	0	1	313	9	8	965	5	4
384	3	4	318	1	0	985	1	0
385	09	10	324	5	4	989	80	79
506	2	3	327	2	1	993	9	8
531	0	1	344	1	0	106 013	3	2
547	7	8	352	9	8	016	2	1
552	5	4	373	5	4	024	9	8
569	6	5	381	1	2	034	5	4
579	9	8	432	5	4	041	2	1
583	09	10	442	4	3	065	09	10
587	0	1	456	30	29	069	8	7
606	59	60	466	8	7	076	4	3
612	0	1	475	4	3	086	8	7
629	8	7	481	3	4	094	3	2
698	8	9	482	5	6	117	7	6
708	7	6	501	7	8	141	8	7
744	6	5	524	4	5	147	3	2
759	5	4	533	9	8	155	6	5
791	9	8	535	2	1	165	7	6
803	2	1	537	5	4	166	6	5
808	4	3	539	8	7	203	9	8
811	7	6	541	1	0	204	8	7
841	6	5	543	4	3	214	7	6
855	5	4	545	7	6	222	8	7
876	2	1	547	90	89	228	1	0
888	1	0	579	5	4	248	7	6
889	5	4	582	9	8	252	2	1
915	9	8	585	3	2	259	3	2
916	3	2	595	6	5	269	60	59
917	7	6	611	6	5	272	6	5
928	40	39	621	8	7	275	2	1
943	7	8	680	1	0	283	1	0
949	1	0	681	2	1	293	7	6
959	9	8	682	3	2	328	5	4
963	4	3	683	4	3	353	5	4
971	4	3	702	1	0	372	3	2
105 024	5	6	715	2	1	383	4	3
026	2	3	729	3	2	388	5	4
028	09	10	733	6	5	398	7	6
034	1	0	737	9	8	404	6	5
057	500	499	762	6	5	411	3	2
065	7	6	782	8	7	420	6	5
074	6	7	784	9	8	433	1	0
091	3	2	817	5	4	434	9	8
116	2	3	827	9	8	435	7	6
144	50	49	835	2	1	436	5	4
166	5	6	838	3	2	453	1	0
167	8	9	841	4	3	454	9	8
197	6	5	858	9	8	455	7	6
213	1	0	862	10	09	456	5	4
217	2	1	866	1	0	457	3	2
255	3	4	881	4	3	486	2	1
265	400	399	887	5	4	510	9	8
272	8	7	895	6	5	521	4	3
274	3	2	905	7	6	557	9	8

[Suite.]

	REUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.
	8	7	107 210	29	30	107 625	7	6
	6	5	222	1	0	627	4	3
	1	2	223	6	5	637	9	8
	7	6	224	1	0	639	6	5
	8	7	225	6	5	665	5	4
	5	4	242	1	0	673	2	1
	3	2	243	6	5	676	2	1
	3	2	244	1	0	696	8	7
	1	0	245	6	5	720	5	4
	2	1	246	1	0	725	1	0
	9	8	258	70	69	726	4	3
	5	4	267	4	3	734	9	8
	1	0	268	9	8	744	10	09
	5	6	274	8	7	787	9	8
	3	2	275	3	2	797	8	7
	6	5	280	7	6	805	1	0
	5	6	295	9	8	811	8	7
	0	1	299	8	7	826	50	49
	9	8	303	7	6	838	3	2
	6	5	310	20	19	866	8	7
	2	1	323	1	0	871	1	0
	5	6	326	5	4	876	4	3
	1	0	334	2	1	883	2	1
	7	6	339	5	4	892	5	4
	30	29	351	10	09	894	30	29
	5	4	381	5	4	896	5	4
	2	1	433	1	0	898	40	39
	7	6	459	80	79	900	5	4
[illegible]	2	1	466	9	8	902	50	49
077	20	19	476	50	49	904	5	4
084	8	9	521	30	29	906	60	59
091	8	7	531	9	8	908	5	4
093	9	8	545	3	2	917	7	6
109	7	6	550	2	1	932	3	2
125	4	3	555	1	0	937	5	4
130	1	0	560	80	79	943	9	8
138	4	3	564	5	4	946	6	5
141	69	70	568	10	09	956	9	8
160	1	0	575	6	5	963	5	4
176	5	4	585	3	2	967	4	3
181	1	0	588	4	3	976	4	3
186	7	6	594	6	5	986	6	5
192	8	7	614	8	7	992	9	8
209	4	5	623	10	09			

Les erreurs de Callet sont supérieures à une demi-unité et moindres qu'une unité du huitième ordre décimal.

Le tableau a été formé en collationnant la Table de Callet sur le manuscrit des grandes Tables du Cadastre qui est déposé à la bibliothèque de l'Observatoire Impérial de Paris.

Toutes les fautes signalées ci-dessus se trouvent dans la belle édition des Tables de Vega, donnée à Leipzig par le D[r] Hülsse sous le titre *Sammlung mathematischer Tafeln*. En outre, dans cette partie de la Table qui a été copiée sur Callet, il y a une erreur de plus que dans l'édition française. On lit log 103 705=0157997[6]; Callet donne 0157997o, et ce dernier logarithme est exact.

Toutes les fautes du *Sammlung*, y compris la dernière, existent également dans le *Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch* publié à Leipzig par le D[r] Köhler.

F. Lefort. — J. Hoüel.

5 avril 1858.

SOLUTION DU PROBLÈME

Étant donnés neuf points d'une surface du second degré, reconnaître géométriquement si un dixième point est intérieur ou extérieur à la surface ou sur la surface;

D'après M. DE JONQUIÈRES.

(*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, février 1858.)

I. Théorèmes et problèmes *connus*, servant de *Lemmes*. Voir *Nouvelles Annales*, t. XII, p. 24, 90, 273, 358.

1°. Étant donnés cinq points d'une conique et une droite, on peut trouver les deux points d'intersection sans

décrire la conique; points réels, distincts, doubles ou imaginaires.

2°. Quatre points étant donnés, on peut trouver *généralement* un cinquième point tel, qu'en dirigeant de ce point quatre droites vers les quatre points on forme un faisceau, dont le rapport anharmonique soit donné, le lieu du cinquième point est une conique passant par les quatre points donnés (*Nouvelles Annales*). Cette conique est dite *capable* du rapport anharmonique donné.

3°. Deux coniques données chacune par cinq points et ayant trois de ces points en commun, on peut construire géométriquement le quatrième point commun.

4°. Étant donnés deux systèmes de six points, chacun en involution et ayant un segment commun, connaissant les segments non communs, on peut construire *géométriquement* le segment commun.

5°. Un faisceau de quatre plans étant coupé par une droite quelconque, les quatre points d'intersection donnent un rapport *anharmonique* égal au rapport anharmonique du faisceau de plans.

6°. Trois surfaces du deuxième degré passant par huit points *quelconques*, se coupent suivant la même courbe, et une droite les coupe en six points en involution.

7°. Deux faisceaux de plans homographiques étant donnés, les plans homologues se coupent suivant des droites situées sur un hyperboloïde dont font partie les deux arêtes des faisceaux.

8°. Six points étant en involution, connaissant deux segments et un point du troisième segment, on peut déterminer le second point de ce segment.

II. Problème. *Étant donnés une génératrice rectiligne* A *et six points* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 *d'un hyperbo-*

loïde à une nappe, construire les autres génératrices rectilignes de cette surface.

Solution. 1°. Menons par la droite A et les cinq premiers points, les cinq plans A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et par a_6, les quatre droites $a_1 a_6$, $a_2 a_6$, $a_3 a_6$, $a_4 a_6$; coupons ces quatre droites par un plan quelconque P en quatre points α_1, α_2, α_3, α_4 ; concevons une conique C passant par ces quatre points et *capable* du rapport anharmonique, donné par les plans A_1, A_2, A_3, A_4 ; soit un cône $(a_6 C)$ ayant pour sommet a_6 et pour base la conique C ; tous les faisceaux des plans qui passent par une arête *quelconque* de ce cône et par les quatre points α_1, α_2, α_3, α_4, donnent un rapport anharmonique égal à celui des quatre plans A_1, A_2, A_3, A_4 (*voir* ci-dessus 5°).

2°. Au plan A_4 substituons le plan A_5 et conservons les trois plans A_1, A_2, A_3 et le même plan P ; on aura quatre points α_1, α_2, α_3, α_5, une conique C_1, et un cône $(f C_1)$ capable du rapport anharmonique des quatre plans A_1, A_2, A_3, A_5 ; les deux coniques C et C_1 ont en commun les trois points α_1, α_2, α_3, on peut donc construire le quatrième point d'intersection B (*voir* ci-dessus 3°) ; a_6 B est donc une arête commune aux deux cônes, donc le faisceau pentaèdre fourni par la droite A et les cinq points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 est homographique au faisceau formé par la droite a_6 B et les mêmes cinq points ; donc les cinq plans homologues se coupent suivant des droites passant par les cinq points et situés sur un hyperboloïde dont font partie les arêtes A et a_6 B (*voir* ci-dessus 7°) ; comme le plan P est arbitraire, on peut obtenir une infinité d'éléments rectilignes. C. Q. F. T.

III. Problème. *Étant donnés un élément rectiligne* A *et six points* $a_1, a_2, \ldots, a_6$ *d'un hyperboloïde à une nappe, trouver les deux points d'intersection de l'hyperboloïde avec une droite donnée.*

Solution. Par la droite donnée, on mène un plan quelconque, on détermine d'après le problème précédent cinq génératrices rectilignes de l'hyperboloïde; les intersections de ces génératrices avec le plan donnent cinq points qui déterminent une conique, et sans la décrire on trouve les intersections avec la droite donnée (*voir* ci-dessus 1°).

C. Q. F. T.

IV. Problème. *Étant donnés neuf points* $a_1, a_2, \ldots, a_9$ *d'une surface du second degré* S *et une droite* a_1O *menée par l'un* a_1 *de ces points, construire le deuxième point d'intersection* b_1 *de cette droite avec la surface.*

Solution. Concevons l'hyperboloïde à une nappe H qui passe par la droite $a_2\,a_9$ et par les six points a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 et un second hyperboloïde K qui passe par la droite $a_3\,a_9$ et par les six points a_2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8; les trois surfaces S, H, K, ont en commun les huit points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8; donc une droite quelconque les rencontre en six points en involution (*voir* ci-dessus 6°); la droite a_1O coupe donc les surfaces H, K, S, en six points h, h_1, K, K_1, a_1, b_1 en involution par le problème précédent, on trouve les quatre points h, h_1, K, K_1; le point a_1 est donné, on peut donc construire le point b_1 (*voir* ci-dessus 8°).

V. *Étant donnés neuf points* $a_1, a_2, \ldots, a_9$, *d'une surface du second degré* S *et une droite quelconque* Ol, *trouver les points d'intersection* λ, λ' *de cette droite avec la surface.*

Solution. Soient les quatre hyperboloïdes à une nappe déterminés

H par la droite $a_2\,a_9$ et les six points $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$;
K par la droite $a_3\,a_9$ et les six points $a_2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$;
H′ par la droite $a_4\,a_9$ et les six points $a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8$;
K′ par la droite $a_5\,a_9$ et les six points $a_2, a_3, a_4, a_6, a_7, a_8$;

la droite Ol coupe les trois surfaces H, K, S, qui ont huit points communs en six points en involution. Soient mm', nn', $\lambda\lambda'$ les trois segments; pour la même raison, la droite Ol coupe les trois surfaces H', K', S en six points en involution; soient pp', qq', $\lambda\lambda'$ les trois segments; dans ces deux systèmes, les segments mm', nn', pp', qq' sont connus d'après le problème III et le troisième segment étant commun aux deux systèmes, on peut le construire (*voir* ci-dessus 4°); donc les points λ et λ' sont déterminés.

C. Q. F. T.

VI. Problème. *O étant un point quelconque de l'espace, construire : 1° la conique d'intersection de la surface* S (*problème* V) *avec le plan mené par les droites* Oa_1, Oa_2; 2° *la polaire du point* O *relativement à cette conique.*

Solution. On détermine les intersections a'_1, a'_2, des droites Oa_1, Oa_2, avec la surface (problème IV) et les intersections λ, λ' d'une droite quelconque Ol, située dans le plan de la conique, avec la surface S (problème V); on connaît donc six points, a_1, a_2, a'_1, a'_2, λ, λ_1 de la conique que nous désignons par Σ; sur la droite $Oa_1a'_1$ on prend le point α tel, que les deux segments $O\alpha$, $a_1a'_1$, donnent un rapport harmonique; on prend de même un point β sur la droite $Oa_2a'_2$ tel, que les segments $O\beta$, $a_2a'_2$ donnent un rapport harmonique; la droite $\alpha\beta$ sera la polaire cherchée du point O; nous la désignons par L.

VII. Problème final. *Étant donnés neuf points* a_1, $a_2, \ldots, a_9$ *d'une surface du second degré et un dixième point quelconque* O, *reconnaître si ce point est au dedans, au dehors de la surface ou dessus.*

Solution. On détermine l'intersection de L avec Σ du problème VI (*voir* ci-dessus 1°); si les points d'intersection sont réels et distincts, le point O est en dehors de

la surface; si le point d'intersection est double, le point O est sur la surface; si les points d'intersection sont imaginaires, le point O est dans l'intérieur de la surface S.

BIBLIOGRAPHIE.

Tables de Logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des Logarithmes d'addition et de soustraction ou Logarithmes de Gauss et de diverses Tables usuelles; par *J. Hoüel*, ancien élève de l'École Normale, docteur ès Sciences. In-8. Paris, Mallet-Bachelier; 1858, Prix : 2 francs.

La Table de logarithmes, originale et unique, calculée par Napier, donnait avec sept figures, ou, pour parler un langage plus moderne mais équivalent, faisait connaître avec sept décimales, les logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques. Briggs, qui, le premier, a compris les idées de Napier, les a propagées par l'enseignement, et s'y est associé en les développant, peut-être même en les améliorant, a publié deux Tables distinctes (*) pour les nombres et pour les lignes trigonométriques, où les valeurs de la fonction logarithmique sont exprimées par quatorze chiffres décimaux. Depuis cette époque, quelques Tables, très-restreintes comme développement, ont été calculées avec un plus grand nombre de décimales; mais aucune, pas même celles construites au Bureau du Cadastre sous la direction de Prony, n'ont fourni, dans une étendue comparable à

(*) *Arithmetica logarithmica*. Londini, 1624; in-folio. — *Trigonometria Britannica*. Goudæ, 1633; in-folio.

celle des Tables de Briggs, une approximation équivalente.

Des considérations d'économie au point de vue typographique ont été, au moins jusqu'à la fin du siècle dernier, le principal motif qui a déterminé à réduire le nombre des décimales dans les Tables successivement extraites des œuvres originales de Briggs et de Vlacq. Gauss paraît avoir traité le premier la question scientifiquement, en vue des applications diverses que ces Tables peuvent recevoir. S'attachant particulièrement aux Tables qui ne nécessitent pas l'emploi des différences secondes pour l'interpolation, il a très-succinctement, mais très-nettement, posé les principes qui en règlent l'usage, et qui déterminent, dans chaque cas, le degré d'approximation qu'on peut espérer d'atteindre (*). Quand on a acquis la parfaite connaissance de ces principes, malheureusement trop peu répandus, on comprend, très-bien la raison d'être des diverses Tables logarithmiques, où le nombre des décimales est plus ou moins restreint, et on sait en user ou s'en abstenir à propos.

L'illustre auteur de la *Theoria motus corporum cœlestium*, longtemps après la publication de cet ouvrage, a déclaré dans les *Annales de Schumacher* (**), qu'il ne faisait jamais usage des Tables de Callet, et à plus forte raison des grandes Tables de Véga, qu'il les trouvait trop développées ; que les Tables de Sherwin lui avaient toujours suffi ; qu'il croyait digne d'encouragement la publication de Tables à cinq ou six décimales, et qu'encore il

---

(*) *Theoria motus corporum cœlestium*, p. 26 et seq. Hamburgi, 1809 ; in-4.

(**) *Astronomische Nachrichten*, t. Ier. — En écrivant l'article auquel je fais allusion, Gauss semble avoir perdu de vue que, dans la *Theoria*, les logarithmes sont donnés avec sept décimales, et qu'il y fait un grand éloge des Tables trigonométriques de Taylor, construites aussi avec sept décimales.

y désirerait la suppression des parties proportionnelles. De pareilles Tables sont en effet sans danger, quand on sait bien nettement le degré d'approximation qu'elles peuvent donner, et le degré de précision que l'on veut atteindre. Elles présentent d'ailleurs d'incontestables avantages sous le rapport de la célérité et de la sûreté du calcul.

Les Tables à cinq décimales, annoncées en tête de cet article, ne satisfont qu'en partie au vœu exprimé par Gauss, puisqu'elles contiennent les parties proportionnelles; mais le grand géomètre aurait sans doute excusé ce luxe arithmétique, en considération de la parfaite convenance des dispositions générales et de la correction des détails d'exécution. On ne pouvait pas moins attendre de l'auteur de cette publication, qui s'est déjà fait avantageusement connaître par d'intéressants travaux sur la mécanique céleste, et par la traduction de plusieurs Mémoires de M. Lejeune-Dirichlet, relatifs aux parties les plus élevées des mathématiques.

Les Tables de Lalande, qui composent le fond du nouveau recueil, ont été publiées dans l'origine sous le format in-18; elles comprenaient uniquement les logarithmes des nombres entiers de 1 à 10000, et les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de 0 à 45 degrés. M. Hoüel y a apporté diverses modifications que, dans son Avertissement, il énumère ainsi qu'il suit :

« 1°. L'agrandissement du format, qui, en diminuant » de beaucoup le nombre des pages à feuilleter, nous a » en outre permis diverses additions utiles ;

» 2°. La suppression des caractéristiques dans la » Table des logarithmes des nombres;

» 3°. L'introduction de Tables auxiliaires donnant les » parties proportionnelles des différences, non-seulement

» pour les logarithmes des nombres, mais encore pour
» ceux des lignes trigonométriques;

» 4°. Le rétablissement, dans les Tables trigonomé-
» triques, des logarithmes des sécantes, que le défaut
» d'espace avait fait supprimer par la plupart des au-
» teurs, et qui sont cependant très-commodes, en dis-
» pensant de l'emploi des compléments arithmétiques
» dans les calculs de trigonométrie;

» 5°. La Table des logarithmes des nombres a été pro-
» longée jusqu'à 10800, nombre de secondes contenues
» dans 3 degrés;

» 6°. En tête des diverses colonnes de cette Table,
» nous avons inscrit les valeurs correspondantes des lo-
» garithmes des rapports du sinus et de la tangente à l'arc
» exprimé en secondes, et par ce moyen cette Table peut
» remplacer avantageusement, pour les trois premiers
» degrés, la Table trigonométrique proprement dite;

» 7°. Pour les petits arcs, l'usage des lignes trigonomé-
» triques naturelles est souvent plus commode que celui
» de leurs logarithmes, ceux-ci se prêtant mal à l'inter-
» polation. Nous donnons en conséquence, dans nos Ta-
» bles trigonométriques, les valeurs naturelles des sinus
» et des tangentes pour les trois premiers degrés. »

Parmi les additions faites par M. Hoüel à la collection de Lalande, on remarque spécialement une Table de logarithmes d'addition et de soustraction, c'est-à-dire une Table destinée à faciliter la recherche du logarithme de la somme ou de la différence de deux nombres, connus seulement par leurs logarithmes. C'est la première édition française des Tables de ce genre, qui sont aujourd'hui assez répandues en Allemagne et en Angleterre. A ce propos je suis bien aise d'avoir l'occasion de placer une critique, ne serait-ce que pour rompre la monotonie de cet article.

Personne ne sait mieux que M. Hoüel à qui appartient l'idée des logarithmes d'addition et de soustraction, qui, le premier, a indiqué la forme à donner aux Tables, et en quels termes Gauss cite Leonelli dans les quelques lignes qui précèdent ses Tables de 1812. Comment se fait-il alors que M. Hoüel écrive, dans l'Avertissement : « Les logarithmes inventés par Leonelli, et auxquels » l'illustre Gauss *a donné* son nom, » et, dans le titre comme dans l'Introduction, « Table des logarithmes d'addition et de soustraction ou *logarithmes de Gauss ?* » Je crois qu'il ne faut laisser usurper le bien de personne, quand on peut le défendre, et qu'on doit exercer une vigilance plus scrupuleuse encore, lorsqu'il s'agit de maintenir le bien des pauvres. Je demanderai donc à M. Hoüel, lors d'un nouveau tirage qui ne se fera sans doute pas attendre, de substituer le nom de Leonelli à celui de Gauss, dans le titre, aux pages XXII et suivantes de son Introduction, et de rectifier l'erreur de fait que tend à accréditer la rédaction amphibologique, à la page v de l'Avertissement : erreur plus dommageable en réalité à la mémoire de Gauss que la rectification ne sera profitable à la mémoire de Leonelli. Il serait injuste en effet de rendre Gauss responsable de l'usage que les Allemands ont fait de son nom dans cette circonstance. La locution *logarithmes de Gauss* a également cours en Angleterre; mais, de l'autre côté du détroit, l'érudition mathématique n'est pas en faveur, si j'en juge par la préface de certaines Tables très-estimées, où l'on décore du nom ambitieux de *méthodes* de nos contemporains, MM. James, John, William, etc., des *procédés* de calcul qui ont été donnés, les uns par Briggs, en 1624, les autres par Flower, en 1771 (*).

(*) Pourquoi dire *formules de Cardan* et pas de *Tartaglia*. TM.

Après cette petite satisfaction donnée à mon *irritation*, je me trouve plus à l'aise pour dire le bien que je pense du travail personnel de M. Hoüel, et pour en indiquer succinctement l'utilité.

On sait que les Tables des logarithmes de Leonelli fournissent une relation entre les trois fonctions A, B, C qui représentent respectivement $\log x$, $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $\log(1+x)$. Dans les Tables calculées primitivement par Gauss, d'après les idées de Leonelli, puis étendues par Matthiessen, la quantité A est prise pour argument, et on trouve en regard les valeurs correspondantes de B et de C. Plus tard, Zech a établi deux Tables séparées, l'une pour l'addition, l'autre pour la soustraction : la première a pour argument A et donne la valeur de B; la seconde a pour argument B et donne la valeur de C. Cette séparation, typographiquement nécessaire pour des Tables à double entrée, comme celles de Zech, était motivée d'une manière générale par la différence d'étendue que chacune des fonctions doit occuper dans l'échelle numérique, et par la simplication qu'elle amène dans le calcul des parties proportionnelles. Ces dernières considérations suffisaient pour déterminer M. Hoüel à adopter la séparation, encore bien que ses Tables dussent être à simple entrée ; mais il a encore amélioré la disposition de Zech, en prenant le nombre C pour argument de la seconde Table, dont il a pu ainsi diminuer l'étendue, sans restreindre le degré d'approximation qu'elle doit fournir.

Les Tables d'addition et de soustraction servent non-seulement à résoudre, plus rapidement que par tous autres procédés, le problème : Étant donnés $\log m$ et $\log n$, trouver $\log(m \pm n)$; elles donnent en outre une solution plus approchée que celles que l'on pourrait déduire de ces autres procédés, si on les mettait en œuvre à l'aide de Ta-

bles vulgaires qui ne comprendraient pas plus de chiffres décimaux que les Tables spéciales. M. Hoüel a donc accompli une œuvre utile en cherchant à faire fructifier, en France, une idée qui, après y avoir germé il y a plus d'un demi-siècle, a été étouffée sous le jugement trop précipité de Delambre.

Les Tables à cinq décimales de M. Hoüel peuvent fournir, avec cinq figures exactes, le logarithme d'un nombre ou le nombre d'un logarithme, et faire connaître, à 5 secondes près, un arc donné par le logarithme de son sinus. Ainsi elles suffisent largement aux besoins des ingénieurs civils et militaires, des architectes, des arpenteurs-géomètres, etc., dont les travaux reposent sur des opérations et sur des formules, qui sont loin, en général, de présenter un pareil degré d'approximation. A plus forte raison peuvent-elles suffire aux nécessités de l'instruction publique, car les élèves trouveront, dans les diverses parties qui les composent, le moyen d'approfondir et d'appliquer tous les principes qui leur sont enseignés. Sous ce dernier rapport, le prix minime auquel l'ouvrage est mis en vente, n'est pas une considération à dédaigner.

Les Tables de M. Hoüel sont imprimées avec le soin et avec la correction que l'on est habitué à rencontrer dans les publications mathématiques qui émanent de la maison Mallet-Bachelier. Je regrette seulement qu'on ait adopté, pour les divisions principales, dans chaque page, des filets verticaux aussi larges que ceux de l'encadrement. Par un effet de contraste, les caractères pâlissent, et l'œil ressent quelque fatigue de la répétition et de la continuité des tons noirs. Je soumets cette réflexion à l'habile Directeur de l'imprimerie, persuadé qu'il trouvera, sans grands frais, un remède à l'inconvénient que je signale.

F. Lefort.

Paris, le 5 juillet 1858.

BIOGRAPHIE.

BRAMER (Benjamin).

Né à Feldsberg (Hesse) en 1588, élevé dès son enfance dans la maison de son beau-frère Burgi, alors horloger du landgrave Wilhelm IV, à Cassel, et célèbre second inventeur des logarithmes. En 1603 Bramer alla avec Burgi à Prague ; mais en 1611, lors de la mort de sa sœur, Bramer revint dans son pays, et en 1612 fut placé comme architecte à Marburg. On a de lui :

1. *Problema, wie aus bekannt gegebenem sinu eines grades, minuten oder secunden alle folgenden sinus aufs leichteste zu finden und der canon sinuum zu absolviren seye, zu Marburg.* 1614.

« Problème, connaissant le sinus d'un arc donné en degrés, minutes et secondes, on peut en déduire de la manière la plus facile les sinus suivants et construire une Table de sinus. »

2. *Benjamin Brameri Beschreibung eines sehr leichten perspectiv-und grundreissenden instruments auff einem stande : auff herrn Johan Faulhabevrs, bestellten Ingenieurs des Hey. Reichs stadt Ulm, weitere continuation seines mathematischen Kunstspiegels, geordnet. Gedrucktzu Cassel durch Johan Wessel, und zu Franckfurt bey Eberhard Kiesern, kupferstechern, zu finden im Jahr* 1630.

« Description d'un instrument très-commode pour prendre la perspective et lever des plans d'une seule station; arrangée comme continuation ultérieure du

miroir artificiel mathématique de Jean Faulhaber, ingénieur en titre de la ville du Saint-Empire, Ulm. Imprimé à Cassel chez Jean Wessel et se trouve à Francfort chez Eberhard Kieser, graveur en cuivre. »

L'ouvrage est dédié au célèbre Faulhaber, et il dit en commençant que dans les mathématiques on rencontre beaucoup de choses cachées et merveilleuses; entre autres, de réduire la multiplication, la division, l'extraction des racines, à de simples additions, soustractions, divisions, etc., et cela au moyen de deux progressions, l'une arithmétique commençant par 0, et l'autre géométrique commençant par 1; et il donne pour exemple

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\ldots,$$

et il ajoute :

Aus diesem fundament hat mein lieber schwager und praeceptor Jobst Burgi, vor zwanzig und mehr jahren, eine schöne progresstabul mi tihren differenzen von 10 *zu* 10 *in* 9 *ziffern calculirt, auch zu Prag ohne bericht in anno* 1620 *drucken lassen; und ist also die invention der Burgi logarith, nicht des Neperi, soudern des gedachten (wie solches vielen vissend, und ihne auch herrn Kepplerees zeignuss gibt) lange zuvor erfunden.*

« C'est sur ce principe que mon cher beau-frère et précepteur Jobst Burgi, il y a vingt ans et davantage, a calculé avec 9 chiffres une belle Table de progression avec les différences de 10 en 10 et qu'il a fait imprimer à Prague en 1620, et ainsi l'invention des logarithmes n'est pas de Neper mais de Burgi ci-mentionné (comme le savent plusieurs et comme Keppler lui en a aussi donné témoignage) qui a fait cette invention longtemps auparavant.

3. *Anhang eines berichts von M. Jobsten Burgi geometrische Triangularinstrument*; addition d'un rapport sur un instrument géométrico-triangulaire de M. Jobst Burgi; dédié à Wilhelm IV en 1648; il a calculé les sinus de deux secondes en deux secondes.

4. Apollonius Cattus oder geometrischen Wegweiser, 3 vol. in-4. Cassel, 1634-48 (*).

1°. Werden die Fundamenta der conischen sectionen, so von Apollonius Pergæus mit schweren, ab absurdo genomenen demontrationen dargethan, nunmehr aus leichten Euclidischen grunden erwiesen;

2°. Wird gewiesen eine neue leichte u. sehr bequeme weise allerhand Sonnenuhren, dieselben fallen se seltzam sie wollen, auf einen cylinder zu schneiden und auf zu reissen;

3°. Anhang eines berichts von M. Jobsten Burgi geom. triangular-instrument, zu jur leicht, kaizen doch gewissen land und feldmessen, wie auch andere hôhen, Tieffen, Langen und Breiten zu eremessen dienlich. C'est une nouvelle édition. Cassel, 1684.

5. Etliche geometriche quæstiones, so bishero nicht üblich gewesen, 4. Marburg, 1618.

6. Geometricher Wegeweiser, 4. Marburg, 1646.

7. Kurze Berichtigung eines Schreg oder Winkel instruments darmit alle aus und eingebogenen Schregen abzunehmen. Marburg, 1615.

8. Trigonometria planorum mecanica oder unterricht und beschreibung eines neuen geom. instruments zu allerhand abmessung u. salvirung der plaucochen triangel, 4. Marburg, 1617.

(*) APOLLONIUS HESSOIS, *Propriétés des sections coniques.*

9. Kurzer aber deutlicher bericht vom gebrauch des von Bj. Bramer erfundenen proportionnel instruments. Cassel, 1622.

10. Bericht zu Jobsten Burgi geom. triangular instrument, 4. Cassel, 1648.

11. Bericht zu seinem semicirculo, damit in allen triangeln in einer observation nit allein die drei Latera, souderen auch die drei Wenkel einer triangls zu finden. Ulm, 1651.

Bramer est mort à Ziegenhayn de 1649 à 1650.

BIBLIOGRAPHIE.

LEONHARDI EULERI OPERA MINORA COLLECTA. Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae-auspiciis Academiae imperialis Scientiarum Petropolitanæ ediderunt auctoris pronepotes D[r] P. H. Fuss (*), Academiæ Petropolitanæ perpetuo a secretis, et Nicolaus Fuss, matheseos professor in gymnasio Petropolitano Lavinensi. Insunt plura inedita. Tractatus de numerorum doctrina capita XVI aliaque. Tomus prior Petropoli, typis ac impensis Academiæ imperialis Scientiarum, 1849; Imperatori augustissimo Nicolaæ primo consecratione, in-4; Prooemium XXVII; Éloge d'Euler, par Fuss, XXIX-XLIX; Index systématique, LI-LXXXVII.

En 1834, on découvrit la pierre sépulcrale d'Euler couverte d'herbes et enfoncée dans le sol d'un cimetière de Saint-Pétersbourg consacré à la Sainte Vierge de Smo-

(*) Un Fuss a épousé une petite-fille d'Euler.

lensk (*Smolenskiana*). L'Académie résolut d'élever en cet endroit un monument. Alors vint l'idée d'un second monument, plus durable, plus utile que le premier, savoir :

Editio completa omnium operum viri illius, quem Academia Petropolitana inde a prima origine quinquaginta amplius annos suum fuisse gloriatur.

« Une édition complète de tous les ouvrages de l'homme que l'Académie de Pétersbourg se glorifie d'avoir possédé, lors de sa fondation, pendant plus d'un demi-siècle. »

C'est le Dr P. A. Fuss, depuis 1826 secrétaire, qui, le 6 mars 1844, en fit la proposition à l'Académie qui, l'ayant adoptée, la transmit à M. S. d'Ouvaroff, ministre de l'instruction publique, président de l'Académie. On calcula que cette édition devait renfermer à peu près 25 volumes grand-in-4 de 80 feuilles ou 640 pages chacun; en publiant 200 feuilles par année ou 4 feuilles par semaine, il faudrait dix années; car les Mémoires de Saint-Pétersbourg renferment plus de 500 Mémoires; ceux de Berlin, 120; de Paris, 17; de Leipsig, 10; de Turin, 6.

Le ministre accueillit avec faveur la proposition, mais remit l'exécution à un temps plus favorable (*in tempus magis secundum*). Au bout de deux années, le temps n'étant pas devenu plus favorable, l'Académie résolut de faire l'entreprise à ses propres frais et de commencer par les *œuvres mineures* (*opera minora*) en 8 volumes in-4. Les deux premiers volumes sont publiés et traitent en général de la théorie des nombres.

Tome I. Le préambule (*procemium*), signé P. H. Fuss, décembre 1848, contient ces renseignements et la liste de soixante et un écrits inédits que M. Fuss a trouvés dans les papiers d'Euler légués à ses héritiers.

Ces écrits inédits sont rangés dans cinq catégories.

1. *Théorie des nombres.* Les carrés magiques; pro-

blèmes sur les sommes des carrés; ces problèmes avaient besoin d'une révision faite par le savant arithmologue Tchebytchew.

2. *Géométrie*. Application du calcul différentiel aux lignes courbes. C'est sans doute le commencement de cette troisième section des *Institutiones calculi differentialis* mentionnée dans cet ouvrage (pars II, cap. II, § 282, 283, 289).

3. *Calcul des sinus*. Savant paradoxe sur la multiplication des angles.

4. *Calcul des probabilités*. Véritable estimation du sort dans le jeu. Réflexions sur une espèce singulière de loterie nommée loterie génoise (en français). C'est une réponse faite au grand Frédéric qui l'avait consulté à ce sujet.

5. *Calcul intégral.*

6. *Mécanique. Principia pro motu sanguinis per arterias determinando*, en 43 paragraphes; les paragraphes 1 à 14 manquent.

7. *Astronomie. Astronomia practica* contient 219 paragraphes et 7 chapitres sur l'attraction des sphères, et sur les forces perturbatrices. — Nouvelles Tables astronomiques pour calculer le lieu du soleil, Berlin 1744; avec beaucoup de corrections grammaticales de la main de Formey. Euler, obligé d'écrire en français, langue qu'il connaissait encore peu, rédigeait ses Mémoires en latin et puis en faisait des versions, ce qui lui prenait beaucoup de temps; dans la suite, il parvint à écrire de prime abord en français.

8. *Artillerie. Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta* (autogr. 6 pages).

9. *Physica.* Un traité de physique en allemand, écrit vers 1730 et pour lequel Euler a reçu 100 thalers de gratification; la sixième feuille manque; contient les principes généraux. — Théorie générale de la dioptrique (en français); diffère beaucoup du Mémoire inséré en 1765 dans les *Mémoires de l'Académie de Paris;* et M. Fuss dit que la publication serait encore très-intéressante. — Recherches sur la découverte des courants de la mer (en français). Il serait intéressant de comparer ce Mémoire avec la *Géographie de la mer,* par Maury, ouvrage traduit par mon fils, professeur d'hydrographie à Dunkerque. — Commencement d'une réponse à une question proposée par l'Académie de Paris en 1751 et non envoyée. Fuss dit qu'elle aurait été couronnée.

Mélanges. Dans cette précieuse réunion de documents, M. Fuss a montré autant de dévouement que de sagacité. Tous ces papiers étaient entassés sans ordre. Car en 1772 la maison d'Euler fut détruite par un incendie et tous ses manuscrits furent transportés pêle-mêle dans un autre domicile. Il y en eut aussi de perdus en entier ou en partie. — Ce préambule est suivi de l'Eloge d'Euler, par Nicolas Fuss, père du secrétaire actuel, et lu à l'Académie du 23 octobre 1783 (XXIX-XLIX). — Ensuite : Index systématique et raisonné des Mémoires arithmétiques de Leonhard Euler contenus dans les deux volumes de cette collection, par MM. V. Bouniakowsky et P. Tchebychew (*) (LII-LXXXVII).

1re *section.* Divisibilité des nombres; décomposition des nombres en facteurs; nombres premiers; théorie des résidus.

(*) P est la lettre initiale de Pafnoufty, saint russe, patron de la ville de Borrows, gouvernement de Kalouga. M. Tchebychew est né près de Borrows.

2ᵉ *section*. Décomposition des nombres en sommes de différentes formes en carrés, en nombres triangulaires, etc.

3ᵉ *section*. Analyse de Diophante; résolution d'équations indéterminées. Problèmes; les sujets sont classés d'après le nombre d'équations simultanées qu'il faut résoudre sur certaines conditions et non d'après le nombre des inconnues, distinction très-rationnelle.

11. Mémoires qui se rapportent plus ou moins directement à la théorie des nombres.

Cet index, conçu dans un esprit philosophique, offre une lecture très-instructive et facilite singulièrement les recherches. L'index donne les titres de quatre-vingt-huit Mémoires publiés antérieurement et de cinq inédits. A côté des énoncés latins, les auteurs ont mis des traductions françaises avec d'utiles développements; les Mémoires sont de 1732-1772.

Tomus posterior, in-4 de 651 pages.

Les Mémoires de 1773 à 1782 et les *Opera arithmetica* inédites.

Tractatus de numerorum doctrina capita **XVI *quæ supersunt*, de 501 à 575, commence par les Notices les plus élémentaires, et chapitre XV, *de divisoribus numerorum formæ* $x^2 + 2y^2$.**

ARITHMOLOGIE.

KUMMER. *Sur la loi générale de réciprocité des restes de puissance.*

C'est une extension du théorème de Legendre et de Gauss sur la loi de réciprocité pour les formes quadratiques, section 5ᵉ des *Disquisitiones*, et s'applique aux

puissances λ; ce nombre λ étant premier absolu, mais ne se rencontrant pas comme facteur dans l'un des numérateurs des premiers $\frac{1}{2}(\lambda - 1)$ nombres bernoulliens.

Divisons la suite *naturelle* des nombres carrés par le nombre premier p; les puissances de p donnent pour reste zéro; mais les autres carrés donnent pour reste, non tous les nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots, p-1$; mais certains de ces nombres qu'on nomme *résidus quadratiques*, et les autres nombres de cette suite sont nommés *résidus non quadratiques* ou simplement *non résidus*; soit, par exemple, $p = 5$; dans la suite 1, 2, 3, 4, les nombres 1 et 4 sont résidus, et 2 et 3 non résidus, car 1, 4, 9, 16, divisés par 5 ne laissent pour restes que 1 et 4. Gauss a démontré le théorème suivant qu'il nomme fondamental (*Disquisit.*, § 131, section IV.)

Soit p *un nombre premier de la forme* $4n + 1$. *Si, parmi les* résidus *quadratiques de* p *se trouve un nombre premier* q, *le nombre* p *sera aussi un résidu quadratique de* q; *et si* q *est un non résidu de* p, p *est aussi un non résidu de* q.

Si p *est un nombre premier de la forme* $4n + 3$ *et* $+q$ *un nombre premier résidu quadratique de* p, *alors* $-p$ *sera résidu quadratique de* q; *et si* $+q$ *est un non résidu*, $-p$ *sera un non résidu de* q.

C'est ce théorème fondamental qui constitue la loi de réciprocité des résidus et non résidus *quadratiques*; c'est cette loi que M. Kummer a étendue à des puissances quelconques, assujetties à la condition ci-dessus énoncée; sa démonstration est fondée sur la théorie des nombres complexes *effectifs* et *idéaux* (*), démonstration analogue

(*) Des éclaircissements sur les nombres *idéaux* qui ne sont pas les imaginaires ordinaires sont très-désirables, même indispensables.

à la seconde démonstration que Gauss a donnée de son théorème fondamental (*Disq.*, sect. V, § 262). Ce Mémoire extrêmement concis échappe à toute analyse. (*Bulletin* de l'Acad. de Berlin.)

V. Bouniakowsky. *Sur un problème de position relatif à la théorie des nombres.* (Bulletin physique et mathématique de l'Académie de Saint-Pétersbourg, t. XVI, 1857.)

1. Soit la suite naturelle des nombres impairs de 1 à $2N+1$ écrits dans ces ordres successifs; pour fixer les idées, prenons $N=4$.

Ordre primitif....	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n° 1.......	8	6	4	2	1	3	5	7	9
n° 2.......	7	3	2	6	8	4	1	5	9
n° 3.......	5	4	6	3	7	2	8	1	9
n° 4.......	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Le rang n° 1 se trouve déduit du premier d'après cette loi : on écrit le premier terme (1) sous le terme du milieu (5); le second terme (2) à gauche du 1; le troisième sera à droite, le quatrième à gauche, et ainsi de suite.

On déduit le rang n° 2 du rang du n° 1, d'après la même loi; le premier (8) sous le terme du milieu (1); le second terme 6 à droite; le troisième terme 4 à gauche; parvenu au quatrième rang, on retrouve l'ordre primitif.

Si dans l'ordre primitif on s'arrête à 8, il suffit de supprimer la colonne des 9; on voit même qu'en général, soit que l'ordre primitif se termine par $2N$ ou par $2N+1$, il faut toujours former le même nombre de rangs pour revenir à l'ordre primitif

2. Soit donc la suite

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad \nu, \ldots, \quad 2N+1,$$

où ν est un nombre quelconque de cette suite ; représentons par ν_1 le quantième de la place qu'occupe ce nombre ν dans un rang quelconque, et par ν_2 le quantième dans le rang immédiatement suivant ; les places sont comptées de gauche à droite. On a cette relation

$$4\nu_1 = 4N + 3 - (-)_{\nu_1} (2\nu_1 - 1)$$

et l'auteur parvient à ce théorème final :

Le nombre minimum *de transformations qui ramène à son état primitif un agrégat composé de* $2N+1$ *ou* $2N$ *éléments, est déterminé par l'exposant* minimum μ *satisfaisant à la congruence*

$$4^{\mu} - 1 = 4\dot{N} + 1 \ (*).$$

Exemple :

$$N = 4; \quad 4N + 1 = 17;$$

on a

$$4^4 - 1 = \dot{17} \quad \text{ou} \quad \mu = 4; \quad 4^4 - 1 = 255 = 17.15,$$
$$N = 5; \quad 4N + 1 = 21;$$

on a

$$2^6 - 1 = \dot{21}; \quad \mu = 6.$$

On trouve dans cet ingénieux travail encore d'autres considérations très-intéressantes ; par exemple, il y a le cas où l'on rencontre des colonnes formées par le même nombre qui se répète ; soit $N = 8$; $2N + 1 = 17$, le nombre 6 est le même dans la sixième colonne, comme le nombre 17 dans la dernière colonne ; on donne des règles pour trouver ces sortes de nombres.

(*) Le point leibnitzien indique un multiple ; l'auteur se sert de la notation usuelle.

BIBLIOGRAPHIE.

Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri, et Regole d'approssimarsi di continuo al vero nelle radici de' numeri non quadrati, con le cause et inventioni loro, et anco il modo di pigliarne la radice cuba, applicando il tutto alle operationi militari, et altre di *Pietro Antonio Cataldi*, lectore delle scienze matematiche nello studio di Bologna; all' illustrissimo signore et padrone colendissimo Fra Ludovico Mariscotti, conte et cavalliero Hierosolimitano gentilhuomo di camera del serenissimo sig. duca di Savoia, et stipendiato della sacre Maesta del Re Catolico. In Bologna, apresso Bartolomeo Cochi. MDCXIII. Con licenza de' superiori. In-folio de 140 pages; titre, dédicace et poëme 2 pages.

A la dernière page (140), l'auteur s'adresse au lecteur et sollicite son indulgence pour le peu d'ordre et même de clarté qui règne dans l'ouvrage auquel, tourmenté par des douleurs physiques et morales, il n'a pu travailler qu'à bâtons rompus et par fragments. Les dernières lignes annoncent que le manuscrit a été livré à l'imprimerie le lundi 11 août 1597 à 21 heures un quart (9 heures un quart du matin) (*).

La vignette du titre porte le blason des Mariscot avec la devise *Loyalemant sans douter*; le portrait en taille-

(*) Cataldi, né à Bologne, mort le 11 février 1628. Professeur de mathématiques et d'astronomie à l'université de Bologne depuis 1584 jusqu'à 1614. A publié plus de trente ouvrages.

douce du chevalier de Malte, alors âgé de trente-cinq ans, précède la dédicace (*).

Dans les douze premières pages, on lit une méthode *abrégée*, très-péniblement exposée, de l'extraction de la racine carrée et d'autres racines; on trouve chiffre par chiffre, mais des opérations *mentales* facilitent les soustractions, les divisions et les élévations aux carrés. L'auteur sépare les tranches, allant de droite à gauche, en mettant un point sous le premier chiffre, un autre point sous le troisième, le cinquième, etc.

La page 12 a pour titre :

Discorso intorno al modo di pigliare, à trovare la radice quadra prossima delli numeri non quadrati, formando il rotto, che sia più del dovere, et della approssimasione continua.

Procédés et raisonnements très-justes, mais portant toujours sur des exemples numériques. Ils sont obscurs et pénibles à suivre : transcrits algébriquement, tout se ramène à ce qui suit :

Soit N un nombre entier non carré; posons

$$N = a^2 + b,$$

où a^2 est le plus grand carré contenu dans N; on a les identités

$$\begin{aligned} N = a^2 + b &= \left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = a_1^2 - b_1 \\ &= \left(a_1 - \frac{b_1}{2a_1}\right)^2 - \frac{b_1^2}{4a_1^2} = a_2^2 - b_2 \\ &= \left(a_2 - \frac{b_2}{2a_2}\right)^2 - \frac{b_2^2}{4a_2^2}, \ldots, \end{aligned}$$

(*) Le célèbre général du Génie Marescot, mort en 1831, prétendait descendre de cette famille des Mariscotti qui a produit plusieurs hommes distingués dès le XIIIe siècle.

où

$$a_1 = a + \frac{b}{2a}, \quad b_1 = \frac{b^2}{4a^2}, \quad a_2 = a_1 - \frac{b_1}{2a_1}, \quad b_2 = \frac{b_1^2}{4a_1^2}, \ldots$$

On voit que les quantités a_1, a_2, a_3, etc., vont en diminuant et sont toujours *supérieures* à $\sqrt{N}$. En effet

$$a_1^2 = a_2 + b + \frac{b^2}{4a^2},$$

$$a_2 = a_1^2 - b_1 + \frac{b_1^2}{4a_1^2} = a_2 + b + \frac{b_1^2}{4a_1^2},$$

et les expressions $\frac{b}{2a}$, $\frac{b^1}{2a_1}$, $\frac{b^2}{2a_2}$ vont aussi en diminuant. Ainsi on approche de plus en plus de la racine, toujours par excès (*più del dovere*).

L'auteur donne pour exemples

1°. $\sqrt{44}$, $a = 6$, $b = 8$,

et trouve successivement

$$a_1 = 6\frac{2}{3}, \quad a_2 = 6\frac{19}{30}.$$

2°. $\sqrt{496}$, $a_1 = 22\frac{3}{11}$, $a_2 = 22\frac{1461}{5390}$.

3°. $\sqrt{55}$, $a_1 = 7\frac{3}{7}$, $a_2 = 7\frac{303}{728}$, $a_3 = 7\frac{3271713}{7860944}$.

4°. $\sqrt{3}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1\frac{3}{4}$, $a_3 = 1\frac{41}{56}$,

$$a_4 = 1\frac{7953}{10864}, \quad a_5 = 1\frac{299303201}{408855776}.$$

Ce procédé algébriquement écrit devient une *série*.

2. A la page 18, on trouve ce procédé pour trouver des valeurs de plus en plus *grandes*, mais toujours in-

férieures (*minore del dovere*) à la vraie valeur :

$$N = a^2 + b = \left(a + \frac{b}{2a+1}\right)^2 + \frac{b}{2a+1} - \frac{b^2}{(2a+1)^2}$$

$$= a_1^2 + b_1 = \left(a_1 + \frac{b_1}{a+a_1+1}\right)^2$$

$$+ \frac{b_1[(a_1+a+1)^2 - 2a_1(a+a_1+1) + a_1^2 - b_1 - a_1^2]}{(a+a_1+1)^2}$$

$$= \left(a_1 + \frac{b_1}{a+a_1+1}\right)^2 + \frac{b_1[(a+1)^2 - a_1^2 - b_1]}{(a+a_1+1)^2} = a_2^2 + b_2.$$

Or

$$(a+1)^2 > a_1^2 + b_1 \quad \text{et} \quad a_2 > a_1, \quad a_2^2 < N,$$

et ainsi de suite.

Exemple :

$$\sqrt{44}, \quad a = 6, \quad b = 8, \quad a_1 = 6\frac{8}{13},$$

$$a_2 = 6\frac{112}{177}, \quad a_3 = 6\frac{1528}{2423}.$$

Il fait la juste remarque que, pourvu que l'on choisisse pour a_1 une valeur quelconque, mais telle que son carré soit inférieur à N, le même procédé donne pour a_2 une valeur plus approchée et toujours par défaut ; par exemple prenons

$$a_1 = 6\frac{5}{8}$$

qui remplit la condition exigée ; on trouvera

$$a_2 = 6\frac{69}{109}.$$

Soit

$$N = 20\frac{1}{2};$$

prenons

$$a_1 = 4\frac{1}{2};$$

on trouve

$$a_2 = 4\frac{10}{19}, \quad a_3 = 4\frac{191}{362}, \quad a_4 = 4\frac{1820}{3449}.$$

Chacun de ces calculs numériques occupe deux pages in-folio.

3. Autre procédé pour trouver les racines *par défaut*. Soit

$$N = a_1^2 - b_1 = \alpha_1^2 + \beta_1,$$

on a

$$\sqrt{N} - \alpha_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{N} + \alpha_1};$$

donc

$$\sqrt{N} - \alpha_1 > \frac{\beta_1}{a_1 + \alpha_1};$$

de là

$$\alpha_1 + \frac{\beta_1}{a_1 + \alpha_1} < \sqrt{N},$$

et cette valeur est plus grande que α_1 et par conséquent plus approchée.

Exemple :

$$N = 44, \quad a_1 = 6\frac{2}{3}, \quad \alpha_1 = 6\frac{8}{13}, \quad \beta_1 = \frac{40}{169}, \quad \sqrt{N} < 6\frac{164}{259}.$$

4. (P. 33.) Soient

$$N = \alpha_1^2 + \beta_1 = \alpha_2^2 + \beta_2,$$

on aura

$$a_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \alpha_2} > \sqrt{N};$$

$$N = a_1^2 - b_1 = a_2^2 - b_2,$$

$$a_1 - \frac{b_1}{2a_1 + a_2} > \sqrt{N};$$

$$N = a_1^2 - b_1 = \alpha_2^2 + \beta_1,$$

$$a_1 - \frac{b_1}{a_1 + \alpha_1} < \sqrt{N}.$$

Il donne encore d'autres procédés du même genre et montre même qu'on peut toujours trouver la racine à moins de $\frac{1}{4}$ près, soit par *excès*, soit par *défaut*, et l'on voit que tous ces procédés mènent à des approximations par *séries*.

5. (P. 40.) On y lit une remarque importante qui revient à ceci :

Soit

$$N = a^2 + b,$$

a étant le plus grand carré contenu dans N; si $a + \frac{b}{2a}$ est une valeur approchée, alors $a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}$ sera une valeur plus approchée et par *défaut*.

Il le démontre ainsi. On a

$$\left(a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}\right)^2 = a^2 + b - \frac{b^2}{2a\left(2a + \frac{b}{2a}\right)} + \frac{b^2}{\left(2a + \frac{b}{2a}\right)}$$

$$= a^2 + b^2 - \frac{b^3}{2a\left(2a + \frac{b}{2a}\right)^2}.$$

Il prend $a = 4$, $b = 3$ et emploie deux pages in-folio pour calculer le *mancamento*, ce qu'on appelle aujour-

d'hui *reste* des séries. Cataldi ne manque jamais de calculer ces restes qui sont pour ainsi dire l'âme de son travail et aussi la partie la plus laborieuse.

Ensuite il remarque aussi que quand la première approximation est par *défaut*, la seconde est par *excès*.

On voit ici le germe des approximations par *fractions continues*.

6. (P. 57). Il résout le problème suivant par l'algèbre :

Per satisfare alli curiosi, et vaghi delle diversità, che intendono essa regola della cosa.

Soit

$$N = 23\frac{13}{36};$$

prenons

$$a = 4, \quad b = 7\frac{13}{36};$$

ainsi la valeur approchée est

$$4\,\frac{7\frac{13}{36}}{8}.$$

Quel nombre faut-il joindre à 8 pour que l'on ait

$$\frac{7\frac{13}{36}}{8+x} = x\,?$$

Résolvant cette équation, il trouve

$$x = \frac{5}{6};$$

ainsi N est un carré parfait dont la racine est $4\frac{5}{6}$. Et autres problèmes du même genre pour d'autres nombres.

7. (P. 62.) $N = a^2 + b$; il prouve que

$$a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a+1}}$$

est une approximation par *excès*.

8. (P. 70.). Il réduit $\sqrt{18}$ en fraction continue de cette manière. La première valeur par *excès* est $4\frac{2}{8}$; donc la seconde valeur par défaut (nº 5) sera $4 + \cfrac{2}{8+\frac{2}{8}}$; considérant $\cfrac{2}{8+\frac{2}{8}}$ comme une fraction simple, la troisième valeur par excès sera

$$4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ldots}}}},$$

et ainsi de suite; ainsi c'est une fraction continue dont les numérateurs ne sont pas l'unité. Mais dans ce cas on peut l'écrire

$$\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8 + \ldots}}}}$$

Ce procédé peut se généraliser. On a

$$x^2 + ax = b,$$

d'où

$$x = \cfrac{b}{a+x} = \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ddots}}},$$

Il pousse le calcul jusqu'à la cinquième fraction, et trouve

$$\sqrt{18} = 4\,\frac{50713000833}{209004522016}.$$

Cataldi sait apprécier l'importance de son invention, qui donne alternativement des valeurs par excès et par défaut. Il la nomme *mirabile proprietà* (p. 70).

La première approximation étant $4\frac{8}{33}$, il donne pour valeur plus approchée

$$4 + \cfrac{8}{33 + \cfrac{8}{33 + \cfrac{8}{33 + \ddots}}},$$

Il pousse les approximations si loin, qu'il obtient des nombres formés de *cinquante* chiffres.

A la page 94 commencent des applications géométriques aux triangles rectangles, aux gnomons, qui montrent géométriquement les approximations données ci-dessus par l'arithmétique.

(P. 104.) Règles pratiques pour ranger les fantassins

en carrés. Au bas de la page 117, on lit la phrase finale *Laus Deo semper;* cependant l'ouvrage continue. A la page 118, on donne une méthode pour extraire la racine carrée des nombres mixtes sans réduire les entiers en fractions.

(P. 120.) Règles pour ranger les hommes en carré sur un terrain de superficie donnée (*quadra di terrano*) ayant égard aux distances réglementaires entre les compagnies et les hommes.

(P. 130 jusqu'à la fin.) Extraction de la racine cubique d'un nombre entier et ses applications.

Les calculs et les discours d'une longueur rebutante ont nui à la réputation de cet ouvrage qui renferme deux découvertes importantes : les approximations *sériaires* et les approximations par *fractions continues*. C'est M. Libri qui le premier a fait ressortir le mérite de Cataldi dans son *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (t. IV, p. 92; 1841); ouvrage où l'auteur se montre savant géomètre, érudit consommé, littérateur éminent, écrivain éloquent, zélé patriote, digne alors du noble pays qui l'a vu naître. Les nombreux écrits de Cataldi sont très-rares, même en Italie. La Bibliothèque impériale possède trois volumes. M. Ravenel, conservateur des imprimés, a bien voulu mettre à ma disposition un des volumes inscrits V. 72; il renferme deux traités, celui que nous avons essayé d'analyser et encore celui-ci: *Trattato del quadratura del cerchio, etc.*, 55 pages et 5 planches; 1612. Ce sont une foule d'approximations par excès et par défaut; les dénominateurs des fractions étant des carrés, il s'en sert pour réfuter une quadrature du cercle proposée par Pellegrino Borrello, professeur de mathématiques à Reggio (duché de Modène).

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK. In zwanglosen heften; als fortzetzung des von. A. L. *Crelle* gegründeten journals, herausgegeben unter mitwirkung des Herren Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass; von C. W. Borchardt mit thätiger Beförderung hoher königlicher Preussicher Behörden. Funf und funfzigster Band. Erstes heft, Berlin, 1858, Druck und verlag von Georg Reimer. — Journal des mathématiques pures et appliquées, continuation par cahiers libres du journal fondé par A. L. CRELLE, publié par C. W Borchardt avec la collaboration de MM. Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass, et par les encouragements efficaces de la haute administration royale de Prusse, LV[e] volume, 1[er] cahier. Berlin, 1858, imprimerie et librairie de Georg. Reimer.

Le premier volume a paru en 1826; ainsi, en trente-deux ans, on a publié 54 volumes; quelle activité dans la plus haute région de l'intelligence. Puisse le digne représentant de cette région, le journal du savant et lucide géomètre Liouville, obtenir aussi en France *les encouragements efficaces de la haute administration*.

CONTENU DU PREMIER CAHIER.

JACOBI. C. G. J. ***Sur la substitution*** $(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+a''a^2+2b''x+c''=0$, ***et sur la réduction de l'intégrale abélienne de première classe à la formule normale (Mémoire posthume communiqué par M. F. Richelot).***

Cette même expression peut s'écrire sous cette forme

$$(ay^2+2a'y+a'')x^2+2(by^2+2b'y+b'')x$$
$$+(cy^2+2c'y+c'')=0,$$

d'où l'on déduit

$$(ax^2 + 2bx + c)y + a'x^2 + 2b'x + c' = \sqrt{X},$$
$$(ay^2 + 2a'y + a'')x + by^2 + 2b'y + b'' = \sqrt{Y},$$
$$X = (a'x^2 + 2b'x + c')^2 + (ax^2 + 2bx + c)(a''x^2 + 2b''x + c''),$$
$$Y = (by^2 + 2b'y + b'')^2 - (ay^2 + 2a'y + a'')(cy^2 + 2c'y - c'').$$

La différentiation donne

$$[(ay^2 + 2a'y + a'')x + by^2 + 2b'y + b'']dx$$
$$+ [(ax^2 + 2bx + c)y + a'x^2 + 2b'x + c']dy = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0;$$

équation aux fonctions elliptiques.

Ainsi, si x et $\sqrt{X}$ sont simultanément *réels*, il en sera de même de y et $\sqrt{Y}$; et *vice versâ;* si x et $\sqrt{X}$ sont simultanément *rationnels*, il en sera de même pour y et $\sqrt{Y}$. Faisons $a' = b' = c' = 0$; alors on voit que si l'on peut rendre carrée *l'une* des deux expressions

$$-(ax^2 + 2bx + c)(a''x^2 + 2b''x + c''),$$
$$(by^2 + b'')^2 - (ay^2 + a'')(cy^2 + c''),$$

on peut aussi rendre carrée *l'autre* expression. Cela correspond à la réduction de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-(ax^2 + 2bx + c)(a''x^2 + 2b''x + c'')}}$$

à la forme

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(by^2 + b'')^2 - (ay^2 + a'')(cy^2 + c'')}},$$

que Legendre obtient par la substitution

$$y^2 = -\frac{a''x^2 + 2b''x + c''}{ax^2 + 2bx + c};$$

et que l'on déduit aussi de ci-dessus en posant

$$a' = b' = c' = 0.$$

Euler n'a considéré que le cas où X et Y sont des fonctions homologues, c'est-à dire où l'on a

$$a' = b; \quad a'' = c; \quad b'' = c';$$

c'est Lagrange qui a donné la forme générale ci-dessus dans les Mémoires de l'Académie de Turin, 1785. M. Jacobi étend ici la même méthode de substitution à l'intégrale abelienne

$$\int \frac{(fx + y)\,dx}{\sqrt{\alpha x^6 + \beta x^5 + \gamma x^4 + \delta x^3 + \varepsilon x + \zeta x + \eta}},$$

de même que pour les fonctions elliptiques, Euler parvient par des voies différentes à des formes semblables, savoir, d'abord en faisant disparaître dans Y les puissances impaires, ou bien aussi le premier et le dernier terme, et déduit de là le théorème sur l'addition des fonctions elliptiques, Jacobi parvient ici de la même manière à une addition de fonctions abéliennes ainsi exprimée

$$\int \frac{(f''z^2 + g'')\,dz}{\sqrt{\alpha''z^8 + \beta''z^6 + \gamma''z^4 + \delta''z^2 + \varepsilon}} = \int \frac{(bg'f't^2)\,dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} - \frac{(bg' - f't'')\,dt'}{\sqrt{\mathrm{T}'}}$$

$$\mathrm{T} = \alpha' t^4 (t^2 - c)^2 + \beta' t^2 (t^2 - c)(at^2 - b^2) + r(at^2 - b^2);$$

changeant t en t', on obtient T'.

Il faut aussi consulter pour la parfaite intelligence de ce Mémoire, extrait des papiers de l'illustre analyste, le

Mémoire de M. Richelot, dans le tome XVI, page 224, 1837 : *De transformatione integralium abelianorum primi ordinis commentatio*, travail que Jacobi avait donné à exécuter à son célèbre élève.

A. Cayley. *Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques* (en français).

Tchebychef (Bull. de l'Académie de Saint-Pétersbourg, n° 370, t. XII). *Sur les questions de* minima *qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* (en français).

Solution de ce problème.

Étant donnée une fonction quelconque avec des paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_n$, il s'agit par un choix convenable des valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de réduire au minimum la limite des écarts de la fonction de o entre $x = -h$ et $x = h$.

Tortolini (Annali di Mat., n° 2, mars et avril 1858). *Nouvelles recherches relatives à la substitution linéaire pour la réduction des fonctions elliptiques de première espèce* (voir 36 *et* 38 *du Journal de Crelle; Plana et Richelot*).

Le but de ce Mémoire est de ramener

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

à la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{L + Mx^2 + Nx^4}},$$

sans décomposer l'équation du quatrième degré en deux facteurs réels du second.

BRIOSCHI (François) (Annali, mai, juin). *Sur les équations du multiplicateur pour la transformation des fonctions elliptiques.*

JOURNAL DE CRELLE.

Contenu du 2ᵉ cahier, t. LV (*voir* p. 78).

S. ARONSOHN (p. 97). *Théorie des fonctions homogènes du troisième degré à trois variables.*

Soient

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\quad u_1,\ u_2,\ u_3,$$

deux systèmes de variables *primitives*;

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\quad U_1,\ U_1,\ U_3,$$

deux nouveaux systèmes de variables correspondants, entre lesquels subsistent ces relations

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3, \\ x_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3, \\ x_3 = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} U_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_1 + \gamma_1 u_1, \\ U_2 = \alpha_2 u_2 + \beta_2 u_2 + \gamma_2 u_2, \\ U_3 = \alpha_3 u_3 + \beta_3 u_3 + \gamma_3 u_3, \end{cases}$$

(1) sera dite *substitution primitive*;
(2) sera dite *substitution transposée.*

Désignons le déterminant commun aux deux substitutions par

$$r = \sum \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 ;$$

désignons encore par

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3),\quad f'(x_1,\ x_2,\ x_3),$$

deux fonctions qui passent l'une dans l'autre par la substitution *primitive*.

Nous nommerons

I. *Invariant*, une combinaison Δ des coefficients de f, qui ont avec les coefficients correspondants de la fonction f' la relation

$$\Delta = r^\lambda \Delta,$$

où λ est un entier positif.

II. *Covariant*, une fonction φ des coefficients de f et des variables x_1, x_2, x_3 qui, en employant la substitution *primitive* (1), a, avec la fonction φ', formée analogiquement des coefficients et des trois variables X_1, X_2, X_3 de la fonction φ', la relation

$$\varphi'(X_1, X_2, X_3) = r^\lambda \varphi(x_1, x_2, x_3).$$

III. *Forme adjointe*, une fonction Γ des coefficients de f et des variables u_1, u_2, u_3 qui, par l'emploi de la substitution *transposée* (2), a, avec la fonction Γ' formée analogiquement avec les coefficients et les variables U_1, U_2, U_3 de la fonction f', la relation

$$\Gamma(U_1, U_2, U_3) = r^\lambda \Gamma(u_1, u_2, u_3)$$

IV. *Forme intermédiaire*, soit Θ une fonction des coefficients de f et des deux systèmes de variables x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, et Θ' une fonction formée *analogiquement*, par l'emploi des deux substitutions, avec les coefficients de f' et les variables X_1, X_2, X_3, U_1, U_2, U_3.

Si l'on a la relation

$$\Theta'(U_1, U_2, U_3; X_1, X_2, X_3) = r^\lambda \Theta(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3),$$

alors Θ est une forme intermédiaire (*).

Les dénominations (I) et (II) ont été introduites par M. Sylvestre; la dénomination (III), par Gauss.

(*) Ces formes seront expliquées en 1859.

La quatrième classe n'a pas encore été considérée jusqu'ici. Son importance ressortira dans la suite de ce travail; elle forme le passage de (II) à (III).

Ce Mémoire, de 95 pages, renferme vingt-sept beaux théorèmes sur ces quatre classes, de la plus haute valeur analytique et même géométrique pour les lignes planes du troisième ordre. Nous essayerons de les faire connaître successivement. Le célèbre analyste s'occupe d'une théorie *générale* des fonctions *homogènes*.

CAYLEY. *Note sur la composition du nombre 47 par rapport aux vingt-troisièmes racines de l'*UNITÉ (en français). *

Soit α une racine 23ᵉ de l'unité; M. Kummer a démontré que 47 est le produit de *onze* facteurs *complexes* qui se déduisent du suivant $\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16}$ (Journal Liouville, XII, p. 208). On sait par la théorie générale qu'il existe un certain nombre 47^{3f} qui peut se décomposer en vingt-deux facteurs complexes; quel est ce nombre? Il est naturel de rechercher si

$$(\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16})^3$$

n'est pas décomposable en deux facteurs; car alors $47^{3.2}$ serait un produit de vingt-deux facteurs complexes; M. Cayley prouve que cette décomposition est impossible.

VORLÄNDER J.-J. *Ausgleichung der fehler polygonometrischer messungen*. In-8°, 55 pages. — Compensation des erreurs dans les mesures polygonométriques.

L'auteur, inspecteur du cadastre dans le cercle de Minden, outre la méthode précise des moindres carrés, indique deux autres méthodes plus courtes; dans

l'une on change convenablement les angles seulement, et dans l'autre les angles et les côtés. Ouvrage très-estimé en Allemagne.

Ulfers. D. W. *Praktische Anleitung und tafeln zur berechnung von Dreiecken niederer ordnung und polygonen*, etc. — Indication pratique et Tables pour le calcul des triangles d'ordre secondaire et les polygones. Coblentz, 1854.

C'est une nouvelle édition des *Tables de coordonnées*, publiées par l'auteur en 1833.

Ces Tables contiennent les produits de sin *a*, cos *a*, coséc *a* par les nombres 10, 20, 30,..., 90, pour la division centésimale; car dans le midi et l'ouest de l'Allemagne, on emploie des instruments géodésiques ainsi *divisés*. Ces Tables facilitent les calculs trigonométriques et dispensent de l'emploi des logarithmes.

Bulletin de l'académie de Saint-Pétersbourg, 1858. Struve (W). (XVI, n° 383, p. 367.)

L'illustre astronome fait le récit de son voyage à Paris, du bon accueil qu'il y a reçu, et parle avec enthousiasme du grand nombre de jeunes astronomes qu'il a rencontrés en Allemagne, pépinière astronomique, espoir de la science.

GÉNÉALOGIE DES BERNOULLI.

1. Bernoulli (Jacob), né dans les Pays-Bas en 1583; quitte Anvers pour échapper aux persécutions du duc d'Albe; se retire à Francfort.

2. Jacob, petit-fils du précédent, né vers 1598; s'établit à Bâle en 1622; y meurt en 1634.

3. Nicolas, fils aîné du précédent, né en 1623; mort en 1708, négociant, membre du grand conseil de Bâle; a laissé onze enfants.

4. Jacob I, cinquième enfant du précédent, né à Bâle en 1654 décembre 27; y meurt en 1705 août 16; professeur de mathématiques à l'université de Bâle en 1687 (célèbre).

5. Jean I, dixième enfant de (3), né à Bâle en 1667 juillet 27; mort en 1748 janvier 1er; docteur en médecine, professeur de mathématiques à l'université de Groningue (1695-1705) (célèbre).

6. Nicolas I, fils du huitième enfant de (3), né en 1687; mort en 1749 novembre 25; docteur en droit, professeur de mathématiques à l'université de Padoue (1716-19), et ensuite professeur des Instituts, de la logique, à l'université de Bâle.

7. Nicolas II, fils de (5), né 1695 janvier 27 (Bâle); mort 1726 juillet 26, à Saint-Pétersbourg; docteur en droit, professeur de droit (Bâle) 1723-1725; de mathématiques à Saint-Pétersbourg.

8. Daniel I, second fils de (5), né 1700 janvier 29 (Groningue); mort 1782 mars 17 (Bâle); docteur en médecine, professeur de mathématiques, 1725-33 (Saint-Pétersbourg); anatomie, botanique, philosophie spéculative à l'université de Bâle (célèbre).

9. Jean II, le plus jeune fils de (5), né 1710 mai 18 (Bâle), mort 1790 (Bâle); docteur en droit, professeur d'éloquence (Bâle), et en 1750, professeur de mathématiques.

10. Jean III, fils du précédent, né 1744 novembre 4 (Bâle), mort 1807 juillet 13, à Kopnick, près Berlin; docteur en philosophie, licencié en droit, astronome (1767) de l'Académie de Berlin.

11. Daniel II, fils de (9), né 1751 janvier 31 (Bâle), mort 1834 octobre 21 (Bâle); docteur en médecine, professeur d'éloquence à l'université de Bâle.

12. Jacob II, fils de (9), né 1759 octobre 17 (Bâle), mort 1789 juillet 3 (Saint-Pétersbourg); noyé en se baignant dans la Néwa; professeur de mathématiques (Saint-Pétersbourg).

13. Christophe, fils de (11), né 1782 mai 15 (Bâle); professeur au Pédagogium de Halle (1802), chef d'institution à Bâle (1806-17); professeur d'histoire naturelle à l'université de Bâle depuis 1817.

14. Jean-Gustave, fils du précédent, né en 1811 (Bâle), auteur d'un *Vade-mecum* du mécanicien.

Rangés par ordre de naissance.

	NAISSANCE.	MORT.	AGE.
1	1583	....	..
2	1598	1634	36
3	1623	1708	85
4	1654	1705	51
5	1667	1748	81
6	1687	1749	62
7	1695	1726	31
8	1700	1782	82
9	1710	1790	80
10	1744	1807	73
11	1751	1834	83
12	1759	1789	30
13	1782	....	..
14	1811	....	..

Ainsi, sur les douze il y a huit octogénaires, un septuagénaire, un sexagénaire, un quinquagénaire.

Age moyen, 58 ans.

BIOGRAPHIE.

LEONELLI (Zecchini).

Né à Crémone en 1776; étudie l'architecture à Rome en 1792, se livre de prédilection aux mathématiques; est à Bordeaux en 1800, où il a donné pendant quelques années des leçons de mathématiques et d'architecture. De là il passe à Milan et publie dans le *Journal de la Société d'encouragement* un article sur son supplément logarithmique; va à Venise une seconde fois et s'y marie; passe à Strasbourg où il publie sa théorie d'électricité; puis à Carlsruhe au service du grand-duc de Bade; passe en Franconie, à Vienne (Autriche) et à Trieste, et finalement à Corfou, où il est nommé directeur du cabinet de physique, et y est mort le 12 octobre 1847. En 1833, il a envoyé à l'Académie des Sciences de Paris des Mémoires : sur la chute des graves; sur la trajectoire des projectiles terrestres; la cause de la cessation des oscillations du pendule; la force vive; une correction faite à la méthode de tirer les racines numériques; une expression monôme algébrique entre le diamètre et la circonférence. Les tables logarithmiques d'additions et de soustractions lui ont coûté beaucoup d'années de fatigues; il les avait confectionnées quelques années avant sa mort et allait les publier quand il tomba malade.

Dans la Correspondance de Zach (Gotha 1812, vol. XXVI, page 499), Gauss dit : *Die idee dazu hat Leonelli*

so viel ich weis zuerst angegeben; allein seine meinung war, eine solche tafel für rechnungen, mit 14 decimalen zu construiren.

(Communiqué par M. BELLAVITIS, professeur à l'université de Padoue.)

Voici ce qu'on trouve sur Leonelli dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences :*

LEONELLI (ZECCHINI). — *Modifications à la méthode d'extraction des racines numériques;* t. IV, p. 961; t. VII, p. 653.

— *Invention et Tables de logarithmes additionnels et déductifs;* t. XIII, p. 807.

— *Note sur la comète de mars* 1843; t. XVII, p. 179.

(PROUHET.)

BIBLIOGRAPHIE.

Le style de prospectus n'est pas une invention moderne. Voici un spécimen en vers qui remonte à l'origine de l'imprimerie.

Kalendarium Johannis de Monte Regio.

Sur le titre, orné de vases fleuris, on lit :

Aureus hic liber est : non est preciosor ulla
Gemma kalendario : quod docet istud opus
Aureus hic numerus : lune : solisque labores
Monstrantur facile : cunctaque signa poli :
Quotque sub hoc libro terre per longa regantur
Tempora : quisque dies : mensis : et annus erit.
Scitur in instanti quecunque sit hora diei
Hunc emat astrologus, qui velit esse cito
Hoc Johannes opus regio de monte Probatum
Composuit : tota notus in Italia.

Quod Veneta impressum fuit in tellure per illas
Inferius quorum nomina picta loco.

1476.

Bernardus pictor de Augusta
Petrus Loslein de Langencen
Erhardus Ratdolt de Augusta.

Calendrier très-rare et imprimé avec luxe. On y trouve une Table de *Venæ sectione per duodecim zodiaci signa.* On donne encore cette indication dans des almanachs royaux sous Louis XIV.

MANUEL THÉORIQUE ET PRATIQUE DE L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS AU CALCUL DES OBSERVATIONS ; par M. *Ritter* (*Élie*). Paris, 1858 ; in-8 de 75 pages.

Excellent opuscule, contenant une exposition claire de la théorie et des procédés commodes et instructifs pour la pratique.

Le chapitre V, consacré à la résolution des équations du premier degré en nombre plus grand que celui des inconnues, doit avoir de l'intérêt pour les professeurs des lycées.

Au chapitre VIII, on résout onze équations entre cinq inconnues, exemple emprunté à Gauss. Les résultats de M. Ritter diffèrent dès les *dizaines* de ceux de l'illustre géomètre.

La méthode des moindres carrés est extrêmement répandue en Allemagne et employée même par des arpenteurs. Nous sommes bien loin de là. Nos levés de Cadastre méritent-ils grande confiance ? J'ai connu en 1812 à Mayence un vérificateur de Cadastre qui arguait de faux tous les calculs par logarithmes. Il est mort du typhus pendant le siége de cette ville.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME IV.)

Historique.

Bibliographie.

(*) Le Ier volume a paru. Les principaux observatoires du monde ont souscrit, excepté un.

Biographie.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.







